Berufliches Schulzentrum Wertheim
Gewerbliche, kaufmännische und hauswirtschaftliche Schule
Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

Aufgaben zur Vorbereitung auf das Berufliche Gymnasium und das Kaufmännische Berufskolleg – Fach Mathematik –

Die nachfolgenden Aufgaben sollen Dir helfen, Dich auf das Niveau der Oberstufe einzustellen und Übergangsprobleme zu mildern. Sie enthalten alle notwendigen Kenntnisse und Techniken. Bitte notiere Dir bei jeder Aufgabe in kurzer Form, ob Du die Aufgabe ohne Schwierigkeiten lösen konntest, ob Du die Aufgabe zwar grundsätzlich verstanden hast, jedoch aufgrund fehlender Kenntnisse nicht lösen konntest oder ob Du die Aufgaben überhaupt nicht verstanden hast! Notiere Dir ebenfalls die Zeit, die Du mit der Bearbeitung der Aufgaben verbringst!

Du kannst uns auch gerne Deine Erfahrungen mit den Aufgaben an

mathe-aufgaben@bsz-wertheim.de

schicken!

1. a) Die Masse der Erde beträgt ungefähr $6 \cdot 10^{24}$ kg, die der Sonne $2 \cdot 10^{30}$ kg. Wie häufig passt die Masse der Erde in die Masse der Sonne?

   Die Masse der Erde ist ungefähr um Faktor 80 größer als die des Mondes. Welche Masse hat der Mond?

   b) Das Universum hat ein Volumen wie ein Würfel mit einer Kantenlänge a von zwanzig Milliarden Lichtjahren (Lichtgeschwindigkeit: $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ein Proton beansprucht ein Volumen wie ein Würfel mit der Kantenlänge $b = 10^{-15}$ m. Wie viele Protonen passen in das Universum?

2. Wandle folgende Terme in Produkte um!

a) $3\,x + 3\,y$	b) $8\,u + 6\,v$	c) $5\,p + 10\,q$
d) $4\,ax + 2\,bx$	e) $3\,xy - 9\,yz$	f) $2\,u^2 - 8\,u$
g) $9\,a^2 - 3\,a^2b^3 - 6\,ab^2$	h) $5\,x^4y - 25\,x^3y^2 + 30\,x^2y^3$	i) $(u - v)\,w - 2\,u + 2\,v$
j) $16\,u^4 - 9\,v^2$	k) $x^6 - 9$	l) $y^6 - 25\,a^2$
m) $a^4 - b^4$	n) $x^4 - 1$	o) $y^5 - y$
p) $104^2 - 96^2$	q) $87^2 - 85^2$	r) $69^2 - 31^2$
s) $4\,x^2 + 4\,x + 1$	t) $4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2$	u) $25\,x^2 - 30\,xy + 9\,y^2$
v) $5\,a\,(b - 2)^2 - (b - 2)^2$	w) $s^2 + 10\,s + 24$	x) $x^{2\,n} - 2\,x^n + 1$

3. Das Licht legt in einer Sekunde ca. $3 \cdot 10^5$ km zurück. Wie viele Meter legt es in einer Stunde zurück?

4. Vereinfache weitestmöglich ohne Taschenrechner!

   a) $5a[6 - 4(3 - a)] - [5a(6a - 11) - 4(3a^2 - 6a + 6)] - 24 - (4a^2 - 108a) : 2$

   b) $(2a - 2b + 4c)(c - 7b) - (c - 2b + a)(a - 2b) - (2c - 3b)(c - 7b + 2a)$

   c) $\dfrac{(a^7 + a^5 - a^3)}{a^2}$

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

e) $8\sqrt{a} - 7\sqrt{2a} - 6\sqrt{a} + 3\sqrt{2a}$

f) Setze $m = 2$ und $n = -3$:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-y^{2m+4}}{x^{n-2}}\right)^4 : \left[\left(\frac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4x^{-2n+1}}{3y^{-3m}}\right)^{-3}\right]$$

5. Anna und Eva sind zusammen 31 Jahre alt. Eva ist 4 Jahre älter als Anna.

   Wie alt ist Anna?

6. Du planst den Getränkeeinkauf für eine Geburtstagsfeier. Du kaufst x Flaschen Apfelsaft zu je 1,45 EUR, y Flaschen Diätlimonade zu je 0,75 EUR und z Flaschen Heidelbeersaftkonzentrat zu je 1,98 EUR ein und gibst w leere Flaschen zurück, für die Du jeweils 0,30 EUR Pfand bekommst.

   Du hast 30 EUR zur Verfügung und gibst 8 leere Flaschen zurück. Welche Einkaufsmöglichkeiten bieten sich Dir?

7. Rechne!

   a) Dividiere die mit 18 potenzierte Summe aus 7 und a durch die mit 9 potenzierte Summe aus a und 7.

   b) Subtrahiere von der mit 2 potenzierten Summe von k und -2 die Zahl 4 und zerlege das Ergebnis so weit wie möglich in Faktoren.

8. Löse per Hand folgende Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rrcr} & x - 4y & = & 10 \\ \wedge & -2x + 8y & = & -20 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrcr} & a - 4b & = & 10 \\ \wedge & 2a + 8b & = & 0 \end{array}$$

9. Löse folgende Gleichungen

   a) $18 - 5x - 7 = 12x + 11 - 17x$

   b) $5(3x - 8) + 3(7x + 6) = 6(8x + 3) - 4(2x + 5)$

   c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$

   d) $\left(x - \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$

   e) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7x + 4$

   f) $x(2{,}5x - 2) - \frac{x}{4}(x - 8) = 2(x - 1)^2 + (1{,}5x - 8)^2$

   g) $1 - \frac{4}{7}x^2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{4}\right) - x\left(2x - \frac{9}{2}\right)$

   h) $x^{12345678924681} = -1$

10. Durch die folgenden Gleichungen sind Geraden beschrieben.

$$y = 2\,(3 - 2\,x) \qquad y + 2\,x - 3 = 0 \qquad 2\,y - 2 = 4\,x \qquad -x + y = -4$$

    Bestimme die Steigung und den y-Achsenabschnitt!

    Zeichne die Geraden in ein Koordinatensystem ein!

    Bestimme den Schnittpunkt der ersten beiden Geraden!

11. Gib eine Gleichung aller Geraden an, die durch den Punkt $\mathrm{P}(-2 \mid 5)$ gehen.

    Gib eine Gleichung der Gerade an, die senkrecht auf der 1. Winkelhalbierenden steht und durch den Punkt $\mathrm{Q}(3 \mid 4)$ geht.

12. Zeichne für $m = 1, m = -2, m = 3$ die Geraden der Geradenschar $y = m\,x - 2\,m + 3$ in ein Koordinatensystem. Was kann man vermuten? Beweise deine Vermutung.

13. Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \quad 3\,y + x - 9 = 0 \qquad g_2: \quad y = -7\,x + 3$$
$$g_3: \quad x + 3\,y + 11 = 0 \qquad g_4: \quad \frac{x}{9} - \frac{y}{9} = 1$$

    a) Zeichne diese in ein Achsenkreuz $(-1 \le x \le 11 \wedge -7 \le y \le 6)$

    b) Diese Geraden begrenzen ein Viereck ABCD. Berechne die Schnittpunkte

$$\{\mathrm{A}\} = g_2 \cap g_3 \qquad \{\mathrm{B}\} = g_3 \cap g_4 \qquad \{\mathrm{C}\} = g_4 \cap g_1 \qquad \{\mathrm{D}\} = g_1 \cap g_2$$

    c) Stelle die Gleichungen der Diagonalen $e(\mathrm{AC})$ und $f(\mathrm{BD})$ auf.

    Berechne exakt den Abstand des Punktes S als Schnittpunkt von e und f vom Ursprung!

    d) Hinweis: Erforderliche Strecken dürfen nicht gemessen werden – sie sind aus den Koordinaten zu berechnen!

    Zeige: $U = 4\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$ LE.

    Begründe die Art des Vierecks ABCD!

    Berechne die Fläche des Vierecks auf zwei grundlegend verschieden Arten!

    e) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, die durch zwei aufeinanderfolgende Seitenmitten festgelegt sind und begründe, dass diese paarweise parallel sind!

    Ist das entstehende Viereck ein Quadrat? Begründe!

    Kann man die Eigenschaft „Quadrat“ dadurch beweisen, dass man die Länge der Diagonalen vergleicht?

    f) Berechne die Größe des Winkels δ auf zwei grundlegend verschiedene Arten! Begründe die Größe des Winkels α!

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

14. Kürze folgende Bruchterme weitestmöglich!

a) $\frac{12\,ab^2}{18\,a^3b}$ b) $\frac{32\,x^4y^5z^2}{24\,x^4y^4z^4}$ c) $\frac{48\,u^2v^5}{80\,u^9v^3}$

d) $\frac{27\,x^5yz^3}{45\,x^4y^2z^3}$ e) $\frac{111\,u^4v^4w^4}{74\,u^5v^4w^3}$ f) $\frac{38\,x^{12}y^{20}z^{14}}{57\,x^{14}y^{18}z^9}$

g) $\frac{4\,x-12}{15-5\,x}$ h) $\frac{x^2-4\,x}{16-x^2}$ i) $\frac{25-x^2}{x^2-10\,x+25}$

j) $\frac{15-20\,x}{8\,x-6}$ k) $\frac{x^2-25}{5-x}$ l) $\frac{x^2-x-2}{4-x^2}$

m) $\frac{x^2+2\,x-3}{-x^2-3\,x+4}$ n) $\frac{90-48\,x+6\,x^2}{2\,x^2-24\,x+54}$ o) $\frac{(x-7)^3}{(14-2\,x)^5}$

15. Ein Mobilfunkunternehmen bietet Handyverträge in zwei Varianten an. Bei der ersten Variante ist eine Grundgebühr von 25 Euro zu zahlen; für das Telefonieren fallen 5 Cent pro Minute an. Das Senden einer SMS ist kostenlos. Bei der zweiten Variante beträgt die Grundgebühr 10 Euro, für das Telefonieren fallen 15 Cent pro Minute an. Auch hier kosten SMS nichts.

Erstelle zwei Gleichungen, die die Gesamtkosten je Variante in Abhängigkeit der Telefonminuten beschreiben! Zeichne die zu den Gleichungen gehörenden Geraden in ein Koordinatensystem!

x-Achse: 1 cm $\longrightarrow$ 20 min, y-Achse: 1 cm $\longrightarrow$ 5 Euro

Welche sachbezogene Bedeutung hat die Steigung der Geraden, welche der y-Achsenabschnitt?

Ab welcher Telefondauer ist die erste Variante günstiger?

16. Für welche Werte des jeweiligen Parameters haben die folgenden Parabeln gemeinsame Punkte mit der x-Achse?

$$y=\frac{1}{2}\,x^2+x-a+2 \qquad y=-x^2+2b\,x+b \qquad y=a\,x^2+4\,x+2$$

Für welche Werte des Parameters liegt der Scheitel oberhalb der x-Achse?

17. Für welche Werte des jeweiligen Parameters schneidet die Parabel $y=\frac{1}{4}\,x^2-2\,x+2$ die Gerade $y=-2\,x+b$ in zwei Punkten?

Für welchen Wert des Parameters schneiden sich Gerade und Parabel an der Stelle $x=2$?

18. Bestimme die Nullstellen der folgenden Parabeln und skizziere ihr Schaubild!

$$y=-x^2+4\,x \qquad y=\frac{1}{2}\,(x+2)(x-1) \qquad y=-\frac{1}{2}\,(x+2)^2+2$$

19. Wie ändert sich das Aussehen der Parabel, wenn sich der Parameter a ändert?
$$y = \frac{1}{2}(x-a)(x-1)$$
Wann liegt der Scheitel auf der x-Achse?

20. Wirft man einen Körper schräg nach oben, so durchläuft er näherungsweise eine Parabelbahn. Durch die Gleichung
$$y = x - \frac{1}{20}x^2$$
ist eine solche Flugbahn gegeben (Abwurf im Koordinatenursprung).

    Skizziere das Schaubild der Parabel.

    Welche maximale Höhe über der x-Achse erreicht der Körper?

    An welcher Stelle landet er wieder auf der x-Achse?

21. Überprüfe, ob folgende Termumformungen richtig sind: (Die Zahlen in Klammern sind Zeilennummern!)
$$\begin{aligned} & 12\,xy^3 - 2\,(3\,x + y^3)^2 + 36\,x^2 && (1)\\ =\ & 12\,xy^3 - 2\,(9\,x^2 + y^6) - 36\,x^2 && (2)\\ =\ & 12\,xy^3 - 18\,x^2 + 2\,y^6 + 36\,x^2 && (3)\\ =\ & 2\,(y^6 + 6\,xy^3 + 9\,x^2) && (4)\\ =\ & 2\,(y^3 + 3\,x)^2 && (5)\\ =\ & (2\,y^3 + 6\,x)^2 && (6) \end{aligned}$$
Solltest Du einen oder mehrere Fehler finden, beschreibe diese Fehler mit Worten!

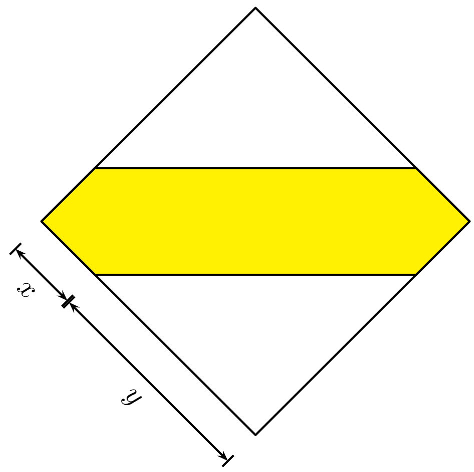
22. Stelle folgende Formeln nach m um:
$$z = \frac{d_a - 2\,m}{m}; \qquad m \neq 0, z \neq -2$$

23. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes werden mit a und c bezeichnet, die Höhe mit h; für seinen Flächeninhalt gilt:
$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$
Stelle die Formel nach c um!

    Wie ändert sich der Flächeninhalt des Trapezes, wenn die Seite a um eine Längeneinheit verlängert und die Seite c um eine Längeneinheit verkürzt wird?

24. Vereinfache die folgenden Brüche ohne Taschenrechner
$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}};\ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}};\ \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}};\ \frac{\frac{39}{288}}{\frac{13}{12}}$$

25. Nenne die Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 30, ohne den Taschenrechner zu verwenden!
26. Wie lauten die auf 2 Dezimalen (Nachkommastellen) genauen Werte von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$? (Natürlich auch ohne Taschenrechner!)
27. Wie lässt sich der Term $a^4 - b^4$ rationell weitmöglichst zerlegen?
28. Wie groß ist jeweils das Quadrat von 1,6; 2,2; 2,4; 2,8?
29. Die Punkte A(0 | 1), B(5 | 3), C(3 | 8) sind drei Ecken eines Quadrats ABCD.
    a) Gib die Koordinaten von D an!
    b) Berechne die Gleichungen der Geraden, welche dieses Quadrat ABCD symmetrisch zerlegen!
30. In das Quadrat ist ein gefärbter „Doppelpfeil" eingezeichnet. Gib den Flächeninhalt des Doppelpfeils in Abhängigkeit von x und y an.



31. Ein Warenhaus verkauft von einem Sonderposten von 200 Kühlschränken 30 Stück. Da der Absatz schleppend ist, setzt es den Preis um 20 % herab, worauf weitere 110 Kühlschränke verkauft werden. Der Rest wird mit einer weiteren Preisherabsetzung von 10 % verkauft, sodass der Verkaufspreis je Stück noch 279,00 EUR beträgt.
    a) Welchen Stückpreis hatte das Warenhaus ursprünglich angesetzt?
    b) Berechne den Gesamterlös!
32. Die Eigentümer eines Mercedes und eines BMW zahlten 2007 für die Teilkaskoversicherung jeweils 239 EUR. Nach einer Änderung der Prämien für 2008 verringerte sich der Betrag für den Mercedes-Fahrer um 55,8 %. Der BMW-Fahrer musste 42,3 % mehr zahlen als der Mercedes-Fahrer. Berechne jeweils die Prämien für 2008.
33. Ramon kauft auf dem Wochenmarkt eine Gurke mit der Masse 1 kg, die zu 99 % aus Wasser besteht. Leider fällt sein Rückweg in die Siestazeit. Während seines Mittagschläfchens ist die

Gurke der Sonne ausgesetzt und besteht nach dem Aufwachen nur noch zu 98 % aus Wasser. Wie groß ist die Masse der Gurke jetzt?

34. Schneidet man einen Würfel mit einer Ebene, so entsteht in der Schnittebene eine geometrische Figur, die wir als Würfelschnitt bezeichnen. Sind die folgenden Figuren als Würfelschnitte möglich?
    a) Dreieck
    b) Viereck – Rechteck – Quadrat
    c) Fünfeck
    d) Sechseck
    e) Siebeneck
    f) Achteck

35. Eine Seerosenpopulation findet in einem 3500 Quadratmeter großen See dermaßen gute Wachstumsmöglichkeiten vor, dass sie sich pro Tag verdoppelt. Nach zwei Wochen ist der See völlig zugewachsen.

    Wann hatten die Seerosen den See nur zur Hälfte bedeckt?

36. Stelle fest, welche reelle Zahlen problemlos eingesetzt werden können (diese Zahlen nennt man die Definitionsmenge)! Stelle den Term in einem kartesischen Koordinatensystem dar!
    a) $T(x) = \sqrt{20 - 4\,x}$
    b) $T(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$
    c) $T(x) = \dfrac{8 - \sqrt{x^2 - 4}}{4 - x}$

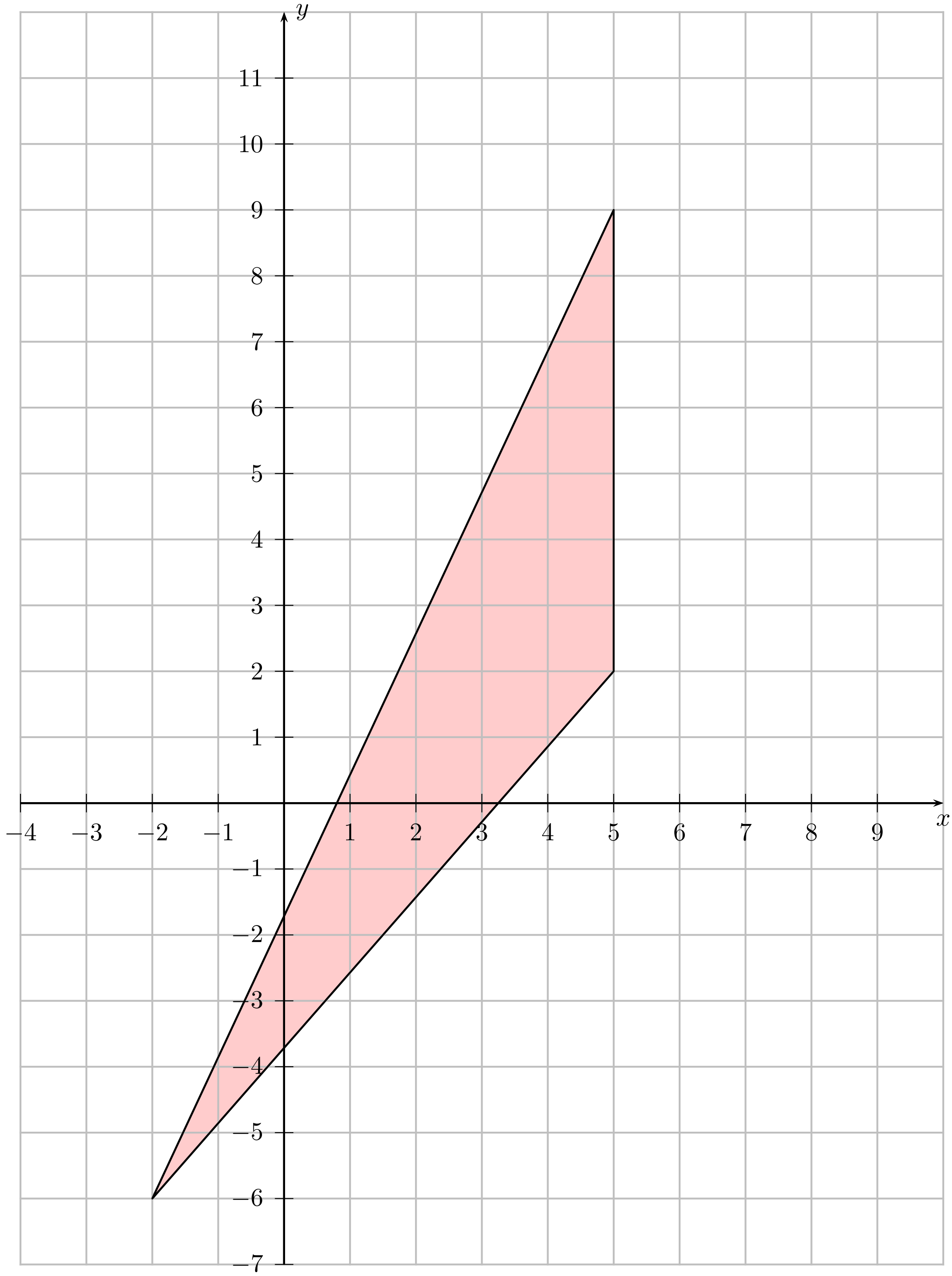
37. Berechne den exakten Abstand zwischen den Punkten P und Q ohne Taschenrechner!
    a) $\mathrm{P}(0 \mid 0)$, $\mathrm{Q}(3 \mid 10)$
    b) $\mathrm{P}(-7 \mid -2)$, $\mathrm{Q}(6 \mid 4)$
    c) $\mathrm{P}(-4 \mid 3)$, $\mathrm{Q}(-5 \mid -6)$

38. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $x - 30$, $x - 23$ und $x - 5$. Für welche Werte von x ist dieses Dreieck rechtwinklig?

39. Löse folgende Gleichungen und führe anschließend die Probe durch!
    a) $x^2 - 2 \cdot 10^3 x - 15 \cdot 10^6 = 0$
    b) $x^2 + 2 \cdot 10^{11} = 12 \cdot 10^5 x$
    c) $x^2 - 5 \cdot 10^{70}\, x + 49 \cdot 10^{138} = 0$

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

40. Zeichne in das folgende Dreieck die Höhen (es gibt drei Höhen in jedem Dreieck) ein und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks aus den Koordinaten ohne zu messen!



Berufliches Schulzentrum Wertheim

Gewerbliche, kaufmännische und hauswirtschaftliche Schule

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199

E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

Main-Tauber-Kreis.de

Lösungen zu den Aufgaben zur Vorbereitung auf das Berufliche Gymnasium
– Fach Mathematik –

Wie wollen Sie denn prüfen, ob meine Lösung auf der nächsten Seite richtig ist, . . .

. . . wenn Sie selber keine haben?

Erarbeite selbständig und möglichst ohne fremde Hilfe Lösungen zu den Aufgaben! Nur so kannst Du feststellen, wo Deine Probleme liegen!

Für Anregungen und Kritik schreiben Sie eine email an

mathe-aufgaben@bsz-wertheim.de

Berufliches Schulzentrum Wertheim
Gewerbliche, kaufmännische und hauswirtschaftliche Schule
Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

Main-Tauber-Kreis.de

Aufgaben zur Vorbereitung auf das Berufliche Gymnasium – Fach Mathematik –

1. a) Die Masse der Erde beträgt ungefähr $6 \cdot 10^{24}$ kg, die der Sonne $2 \cdot 10^{30}$ kg. Wie häufig passt die Masse der Erde in die Masse der Sonne?

$$\frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{30-24} = \frac{1}{3} \cdot 10^{6} = \frac{1}{3} \cdot 1\,000\,000 \approx 333\,333$$

Potenzgesetze.

Die Masse der Erde ist ungefähr um Faktor 80 größer als die des Mondes. Welche Masse hat der Mond?

$$\frac{6 \cdot 10^{24}}{80} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{8 \cdot 10} = \frac{3}{4} \cdot 10^{23} = 0{,}75 \cdot 10^{23} = 7{,}5 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$$

Potenzgesetze.

b) Das Universum hat ein Volumen wie ein Würfel mit einer Kantenlänge a von zwanzig Milliarden Lichtjahren (Lichtgeschwindigkeit: $c = 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ein Proton beansprucht ein Volumen wie ein Würfel mit der Kantenlänge $b = 10^{-15}$ m. Wie viele Protonen passen in das Universum?

$$\begin{aligned}
V_{\text{Universum}} &= \left(20 \cdot 10^{9} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^{8}\right)^{3} \\
&= \left(20 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^{9+8}\right)^{3} \\
&= \left(1\,892\,160\,000 \cdot 10^{17}\right)^{3} \\
&= \left(1{,}89216 \cdot 10^{9} \cdot 10^{17}\right)^{3} \\
&\approx \left(1{,}892 \cdot 10^{26}\right)^{3} \\
&\approx 6{,}77 \cdot \left(10^{26}\right)^{3} \\
&\approx 6{,}77 \cdot 10^{78}\ \text{m}^{3} \\
V_{\text{Proton}} &= \left(10^{-15}\right)^{3} = 10^{-45}\ \text{m}^{3} \\
\frac{V_{\text{Universum}}}{V_{\text{Proton}}} &\approx \frac{6{,}77 \cdot 10^{78}}{10^{-45}} \\
&\approx 6{,}77 \cdot 10^{123}
\end{aligned}$$

Es passen ca. $6{,}77 \cdot 10^{123}$ Protonen in das Universum.

Berufliches Schulzentrum Wertheim
Gewerbliche, kaufmännische und hauswirtschaftliche Schule
Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de
Main-Tauber-Kreis.de

2. Wandle folgende Terme in Produkte um!

$3\,x + 3\,y = 3\,(x+y)$	3 ausgeklammert	(a)
$8\,u + 6\,v = 2\,(4\,u + 3\,v)$	2 ausgeklammert	(b)
$5\,p + 10\,q = 5\,(p + 2\,q)$	5 ausgeklammert	(c)
$4\,ax + 2\,bx = 2\,x\,(2\,a + b)$	$2\,x$ ausgeklammert	(d)
$3\,xy - 9\,yz = 3\,y\,(x - 3\,z)$	$3\,y$ ausgeklammert	(e)
$2\,u^2 - 8\,u = 2\,u\,(u-4)$	$2\,u$ ausgeklammert	(f)
$9\,a^2 - 3\,a^2b^3 - 6\,ab^2 = 3\,a\left(3\,a - ab^3 - 2\,b^2\right)$	$3\,a$ ausgeklammert	(g)
$5\,x^4y - 25\,x^3y^2 + 30\,x^2y^3 = 5\,x^2y\,(x^2 - 5\,xy + 6\,y^2)$	$5\,x^2y$ ausgekl.	(h)
$= 5\,x^2y\;(x - 2\,y)\,(x - 3\,y)$	Satz von Vieta	
$(u-v)\,w - 2\,u + 2\,v = (u-v)\,w - 2\,(u-v)$		(i)
$= (u-v)(w-2)$	$(u-v)$ ausgeklammert	
$16\,u^4 - 9\,v^2 = (4\,u^2 - 3\,v)(4\,u^2 + 3\,v)$	3. Binom	(j)
$x^6 - 9 = (x^3)^2 - 3^2 = (x^3+3)(x^3-3)$	3. Binom	(k)
$y^6 - 25\,a^2 = (y^3)^2 - (5\,a)^2 = (y^3 - 5\,a)(y^3 + 5\,a)$	3. Binom	(l)
$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2+b^2)(a^2-b^2)$	3. Binom	(m)
$= (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$	3. Binom	
$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$	3. Binom	(n)
$= (x^2+1)(x+1)(x-1)$	3. Binom	
$y^5 - y = y\,(y^4 - 1)$	y ausgeklammert	(o)
$= y\,(y^2+1)(y+1)(y-1)$	wie vorher bei m)	
$104^2 - 96^2 = (100+4)^2 - (100-4)^2$	3. Binom	(p)
$= (100 + 4 + 100 - 4)(100 + 4 - 100 + 4)$		
$= 200 \cdot 8$	$(a+b)(a-b)$	
$87^2 - 85^2 = (86+1)^2 - (86-1)^2 \ldots$		(q)
$69^2 - 31^2 = (50+19)^2 - (50-19)^2 \ldots$		(r)
$4\,x^2 + 4\,x + 1 = (2\,x+1)^2$	1. Binom	(s)
$4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2 = (2\,a + 3\,b)^2$	1. Binom	(t)
$25\,x^2 - 30\,xy + 9\,y^2 = (5\,x)^2 - 2\cdot 5\,x \cdot 3\,y + (3\,y)^2$	2. Binom	(u)
$= (5\,x - 3\,y)^2$		

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

$$\begin{aligned}
5\,a\,(b-2)^2 - 1\cdot(b-2)^2 &= (5\,a-1)(b-2)^2 && (b-2)^2 \text{ auskl.} \quad (v)\\
s^2 + 10\,s + 24 &= (s+6)(s+4) && \text{Satz von Vieta} \quad (w)\\
x^{2\,n} - 2\,x^n + 1 &= (x^n)^2 - 2\,x^n + 1 && \text{5. Potenzgesetz} \quad (x)\\
&= (x^n - 1)^2 && \text{2. Binom}
\end{aligned}$$

Satz von Vieta

3. Das Licht legt in einer Sekunde ca. $3\cdot 10^5$ km zurück. Wie viele Meter legt es in einer Stunde zurück?

$$\begin{aligned}
3\cdot 10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}} &= 3\cdot 10^5\,\frac{1000\text{ m}}{\text{s}} && \text{Längenumrechnung}\\
&= 3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} && \text{Potenzgesetze}\\
&= 3\cdot 3600\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{h}} && \text{Dreisatz}\\
&= 10800\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{h}}\\
&= 1{,}08\ \cdot 10^{12}\,\frac{\text{m}}{\text{h}} && \text{Potenzgesetze}\\
&= 1080000000000\,\frac{\text{m}}{\text{h}}
\end{aligned}$$

4. Vereinfache weitestmöglich ohne Taschenrechner! Hier sollten die bekannten Rechengesetze angewandt werden, z. B. Distributivgesetz, Potenzgesetze, etc.

   a) $5\,a[6-4(3-a)] - [5a(6a-11) - 4(3a^2-6a+6)] - 24 - (4a^2-108a) : 2 =$

   Geschachtelte Klammern von innen nach außen auflösen. Minusklammer richtig auflösen – Vor-/Rechenzeichen umkehren!

$$\begin{aligned}
&5\,a\,[6-4\,(3-a)] - [5\,a\,(6\,a-11) - 4(3a^2-6a+6)] - 24 - (4\,a^2 - 108\,a) : 2\\
&= 5\,a\left[6-12+4\,a\right] - \left[30\,a^2 - 55\,a - 12\,a^2 + 24\,a - 24\right] - 24 - 2\,a^2 + 54\,a\\
&= 5\,a\left[-6+4\,a\right] - \left[18\,a^2 - 31\,a - 24\right] - 24 - 2\,a^2 + 54\,a\\
&= -30\,a + 20\,a^2 - 18\,a^2 + 31\,a + 24 - 24 - 2\,a^2 + 54\,a\\
&= 20\,a^2 - 18\,a^2 - 2\,a^2 - 30\,a + 31\,a + 54\,a + 24 - 24\\
&= 55\,a
\end{aligned}$$

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

b) $(2a-2b+4c)(c-7b)-(c-2b+a)(a-2b)-(2c-3b)(c-7b+2a)=$

Klammern nach dem Distributivgesetz auflösen, Buchstaben dabei gleich in alphabetische Reihenfolge bringen!

$$\begin{aligned}
&(2a-2b+4c)(c-7b)-(c-2b+a)(a-2b)-(2c-3b)(c-7b+2a)\\
&=2\,ac-2\,bc+4\,c^2-14\,ab+14\,b^2-28\,bc-(ac-2\,ab+a^2-2\,bc+4\,b^2-2\,ab)\\
&\quad-(2\,c^2-14\,bc+4\,ac-3\,bc+21\,b^2-6\,ab)\\
&=2\,ac-30\,bc-14\,ab+14\,b^2+4\,c^2-(ac-4\,ab-2\,bc+a^2+4\,b^2)\\
&\quad-(-6\,ab+4\,ac-17\,bc+21\,b^2+2\,c^2)\\
&=2\,ac-30\,bc-14\,ab+14\,b^2+4\,c^2-ac+4\,ab+2\,bc-a^2-4\,b^2\\
&\quad+6\,ab-4\,ac+17\,bc-21\,b^2-2\,c^2\\
&=-a^2-4\,ab-3\,ac-11\,b^2-11\,bc+2\,c^2
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{(a^7+a^5-a^3)}{a^2}=\dfrac{a^3\,(a^4+a^2-1)}{a^2}=a\left(a^4+a^2-1\right)$

d) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\cdot\left(\dfrac{15}{16}\right)^4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

e) $8\sqrt{a}-7\sqrt{2\,a}-6\sqrt{a}+3\sqrt{2\,a}=2\sqrt{a}-4\sqrt{2\,a}=2\left(1-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{a}$

f) Setze $m=2$ und $n=-3$:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{-y^{2m+4}}{x^{n-2}}\right)^4:\left[\left(\frac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4x^{-2n+1}}{3y^{-3m}}\right)^{-3}\right]\\
&\overset{m=2,n=3}{=}\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{-y^{4+4}}{x^{-3-2}}\right)^4:\left[\left(\frac{y^{2-8}}{x^{-3+2}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4x^{6+1}}{3y^{-6}}\right)^{-3}\right]\\
&=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{-y^{8}}{x^{-5}}\right)^4:\left[\left(\frac{y^{-6}}{x^{-1}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4x^{7}}{3y^{-6}}\right)^{-3}\right]\\
&=-\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(x^5\,y^8)^4:\left[\frac{y^{12}}{x^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{x^{-21}}{y^{18}}\right]\\
&=-\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(x^5\,y^8)^4:\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{x^{23}\,y^6}\right]\\
&=-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot x^{20}\,y^{32}}{\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{x^{23}\,y^6}}\\
&=-x^{20}\,y^{32}\cdot x^{23}\,y^6\\
&=-x^{43}\,y^{38}
\end{aligned}$$

5. Anna und Eva sind zusammen 31 Jahre alt. Eva ist 4 Jahre älter als Anna.

   Wie alt ist Anna? a sei das Alter von Anna, e das Alter von Eva. $a+e=31\ \wedge\ a+4=e$ führt zu $a=13{,}5\ \wedge\ e=17{,}5$. Anna ist dreizehneinhalb, Eva siebzehneinhalb.

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

6. Du planst den Getränkeeinkauf für eine Geburtstagsfeier. Du kaufst x Flaschen Apfelsaft zu je 1,45 EUR, y Flaschen Diätlimonade zu je 0,75 EUR und z Flaschen Heidelbeersaftkonzentrat zu je 1,98 EUR ein und gibst w leere Flaschen zurück, für die Du jeweils 0,30 EUR Pfand bekommst.

   Du hast 30 EUR zur Verfügung und gibst 8 leere Flaschen zurück. Welche Einkaufsmöglichkeiten bieten sich Dir?

   x = Anzahl der Flaschen Apfelsaft; y = Anzahl der Flaschen Diätlimonade; z = Anzahl der Flaschen Heidelbeersaftkonzentrat;

x	y	z
0	30	5
3	11	10
12	20	0
15	1	5

   Weitere Lösungen, welche das Budget voll nutzen, existieren nicht! Probieren (auch mit einer Tabellenkalkulation) oder mit dem Stichwort „Diophantische Gleichung“ unter `http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/diophant.htm`

7. Rechne!

   a) Dividiere die mit 18 potenzierte Summe aus 7 und a durch die mit 9 potenzierte Summe aus a und 7.

$$\frac{(7+a)^{18}}{(a+7)^9} = \frac{(a+7)^{18}}{(a+7)^9} = (a+7)^9$$

   b) Subtrahiere von der mit 2 potenzierten Summe von k und -2 die Zahl 4 und zerlege das Ergebnis so weit wie möglich in Faktoren.

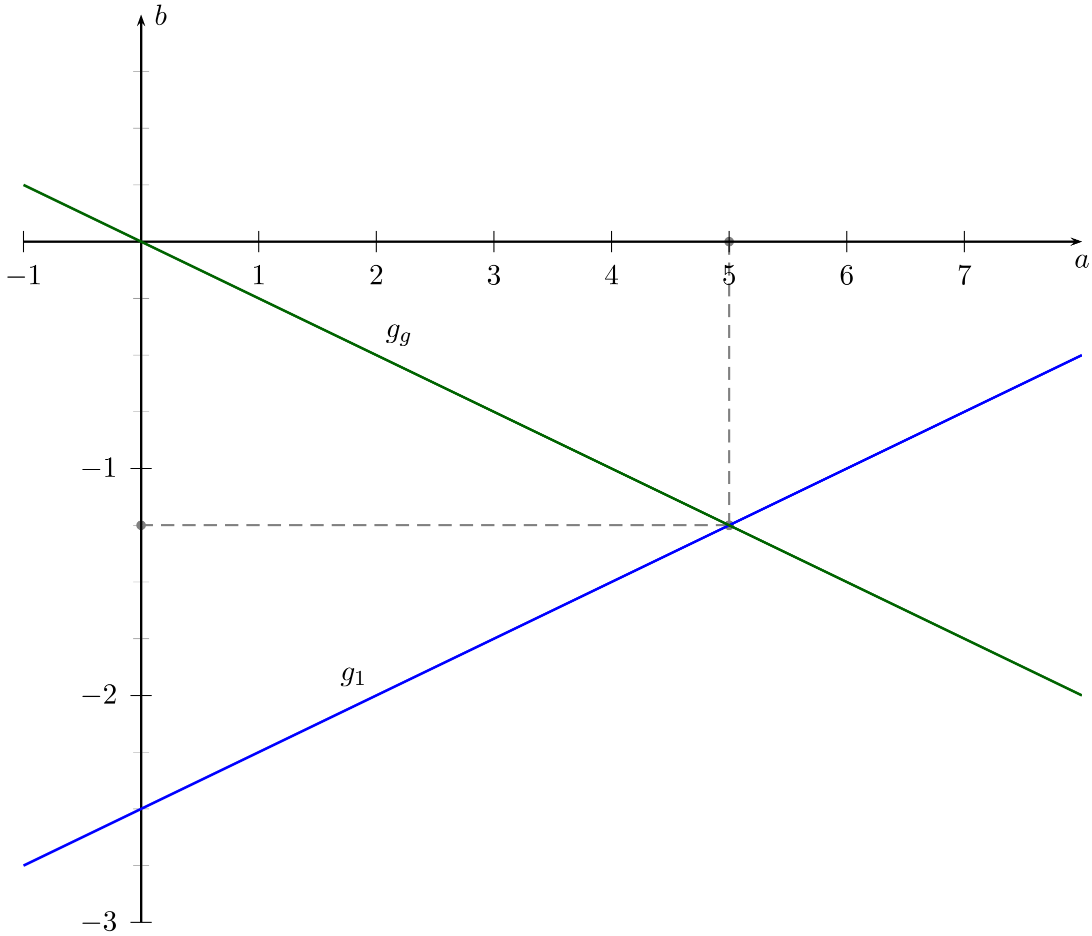
$$(k-2)^2 - 4 = k^2 - 4\,k + 4 - 4 = k^2 - 4\,k = k\,(k-4)$$

8. Löse per Hand folgende Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rrcr} & x - 4\,y & = & 10 \\ \wedge & -2\,x + 8\,y & = & -20 \end{array} \iff y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} \;\wedge\; x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rrcl} & a-4\,b & = & 10 \\ \wedge & 2\,a+8\,b & = & 0 \end{array} \iff a=5 \;\wedge\; b=-\frac{5}{4}$$

Wir können das Gleichungssystem auch graphisch lösen, indem wir beide Gleichungen im selben a-b-Koordinatensystem darstellen! g_1 sei die Gerade, die zur ersten Gleichung gehört; g_2 diejenige, die zur zweiten Gleichung gehört.



Hinweis: Die Skalierung beider Achsen muss nicht zwingend gleich sein!

9. Löse folgende Gleichungen

a)

$$\begin{aligned} 18-5\,x-7 &= 12\,x+11-17\,x \\ 11-5\,x &= -5\,x+11 \\ 0 &= 0 \quad \text{w. A.} \qquad\qquad \mathrm{L}=\mathrm{D} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5\,(3\,x-8)+3\,(7\,x+6) &= 6\,(8\,x+3)-4\,(2\,x+5) \\ 15\,x-40+21\,x+18 &= 48\,x+18-8\,x-20 \\ 36\,x-22 &= 40\,x-2 \\ -4\,x &= 20 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{6}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12} &= 11 && \mid \cdot 24 \\ 12\,x+8\,x+6\,x-4\,x+3\,x+2\,x &= 264 \\ 27\,x &= 264 \\ x &= \frac{88}{9} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{2}{7}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right) &= 0 \\ x-\frac{2}{7}=0 \ \vee \ x+\frac{4}{3} &= 0 \\ x=\frac{2}{7} \ \vee \ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} (x+1)^2-(x-1)^2 &= 7\,x+4 \\ x^2+2\,x+1-(x^2-2\,x+1) &= 7\,x+4 \\ x^2+2\,x+1-x^2+2\,x-1 &= 7\,x+4 \\ 4\,x &= 7\,x+4 \\ -3\,x &= 4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
x\,(2{,}5x-2)-\frac{x}{4}\,(x-8) &= 2\,(x-1)^2+(1,5\,x-8)^2\\
\frac{5}{2}\,x-2\,x-\frac{1}{4}\,x^2+2\,x &= 2\,(x^2-2\,x+1)+\frac{9}{4}\,x^2-24\,x+64\\
\frac{9}{4}\,x^2 &= 2\,x^2-4\,x+2+\frac{9}{4}\,x^2-24\,x+64\\
0 &= 2\,x^2-28\,x+66\\
0 &= x^2-14\,x+33\\
0 &= (x-3)(x-11)\\
x &= 3\ \vee\ x=11
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
1-\frac{4}{7}\,x^2 &= 2\,(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)-x\left(2\,x-\frac{9}{2}\right)\\
1-\frac{4}{7}\,x^2 &= 2\left(x^2-2\,x-\frac{1}{4}\,x+\frac{1}{2}\right)-2\,x^2+\frac{9}{2}\,x\\
1-\frac{4}{7}\,x^2 &= 2\left(x^2-\frac{9}{4}\,x+\frac{1}{2}\right)-2\,x^2+\frac{9}{2}\,x\\
1-\frac{4}{7}\,x^2 &= 2\,x^2-\frac{9}{2}\,x+1-2\,x^2+\frac{9}{2}\,x\\
-\frac{4}{7}\,x^2 &= 0\\
x &= 0
\end{aligned}$$

h) $x^{12345678924681} = -1$ hat als einzige Lösung $x = -1$, da der Exponent 12345678924681 aufgrund letzten Ziffer ungerade ist.

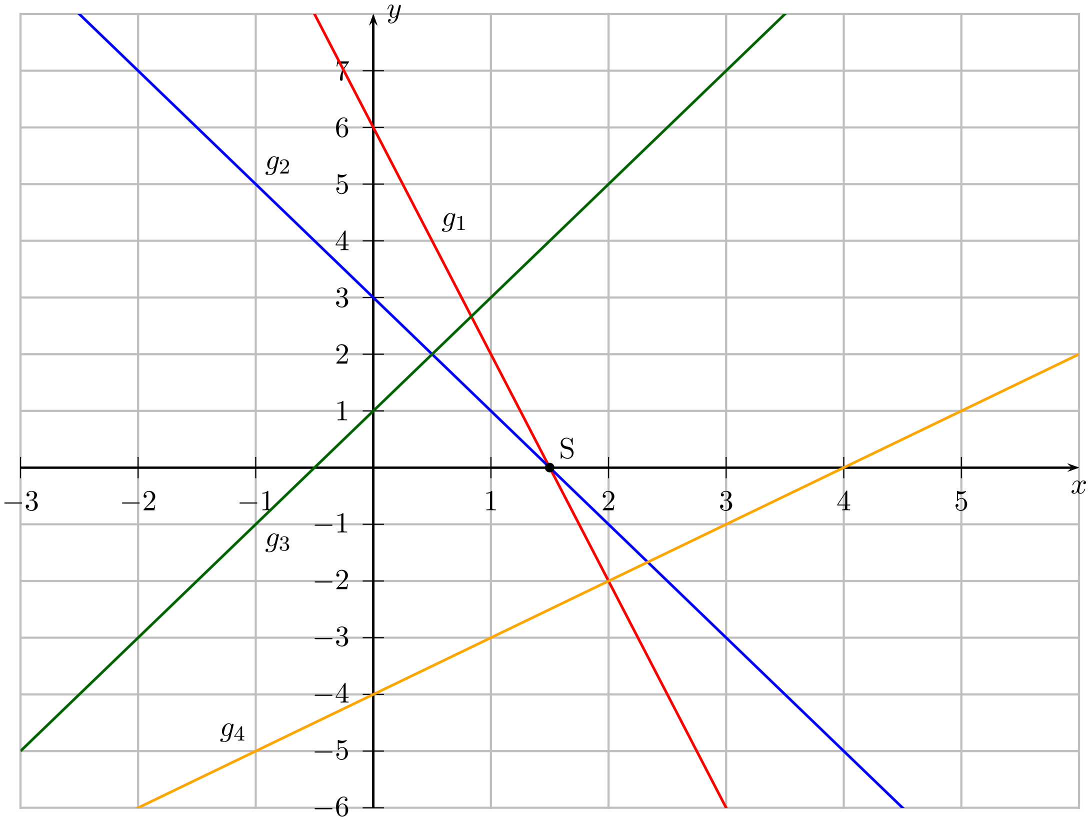
10. Durch die folgenden Gleichungen sind Geraden beschrieben.

$$y = 2\,(3 - 2\,x) \qquad y + 2\,x - 3 = 0 \qquad 2\,y - 2 = 4\,x \qquad -x + y = -4$$

Bestimme die Steigung und den y-Achsenabschnitt! Stichwort: Hauptform der Geradengleichung!

$$\begin{aligned}
g_1 &: \; y = -4\,x + 6 & m &= -4; b = 6\\
g_2 &: \; y = -2\,x + 3 & m &= -2; b = 3\\
g_3 &: \; y = 2\,x + 1 & m &= 2; b = 1\\
g_4 &: \; y = x - 4 & m &= 1; b = -4
\end{aligned}$$

Zeichne die Geraden in ein Koordinatensystem ein!



Bestimme den Schnittpunkt der ersten beiden Geraden!

$g_1 \cap g_2 : \mathrm{S}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)$

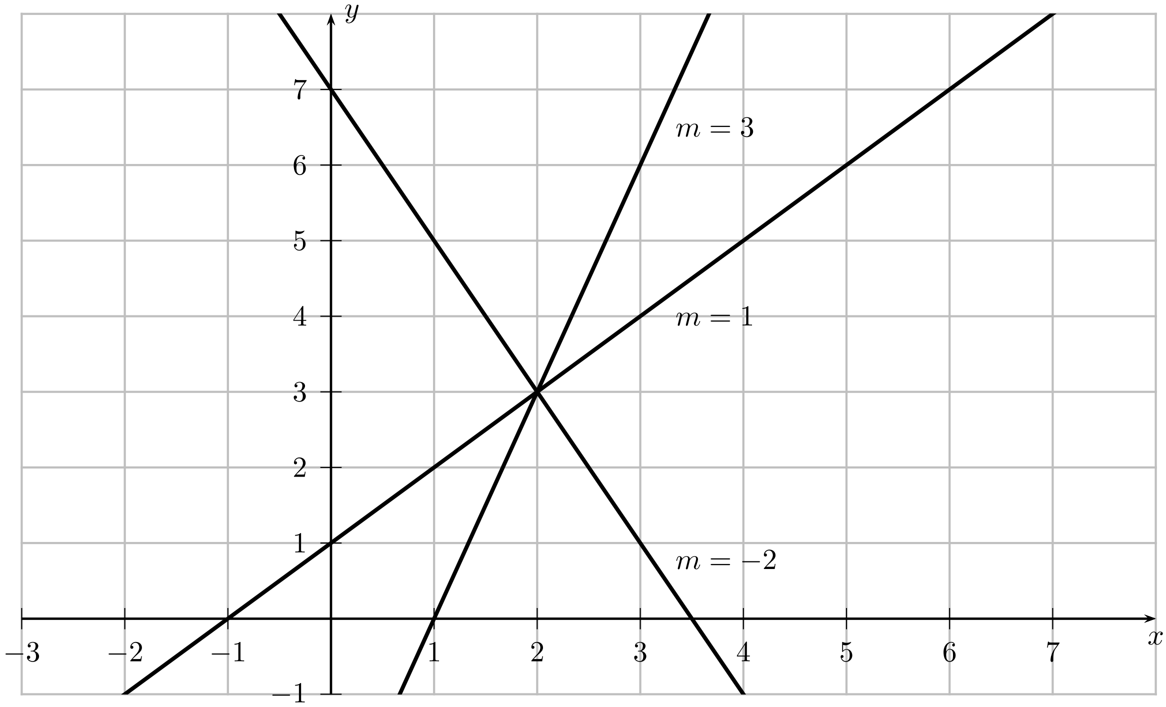
11. Gib eine Gleichung aller Geraden an, die durch den Punkt $\mathrm{P}(-2 \mid 5)$ gehen.

    Punktsteigungsform: $g: \; y = m\left(x - (-2)\right) + 5 = m\,(x+2) + 5; \; m \in \mathbb{R}$

    Gib eine Gleichung der Gerade an, die senkrecht auf der 1. Winkelhalbierenden steht und durch den Punkt $\mathrm{Q}(3 \mid 4)$ geht.

    $l: \; y = -(x-3) + 4 = -x + 7$

12. Zeichne für $m = 1, m = -2, m = 3$ die Geraden der Geradenschar $y = m\,x - 2\,m + 3$ in ein Koordinatensystem. Was kann man vermuten? Beweise deine Vermutung.



    Vermutung: Alle Geraden schneiden sich im Punkt $\mathrm{G}(2 \mid 3)$.

    Durch eine Probe: $m \cdot 2 - 2 \cdot m + 3 \overset{!}{=} 3$

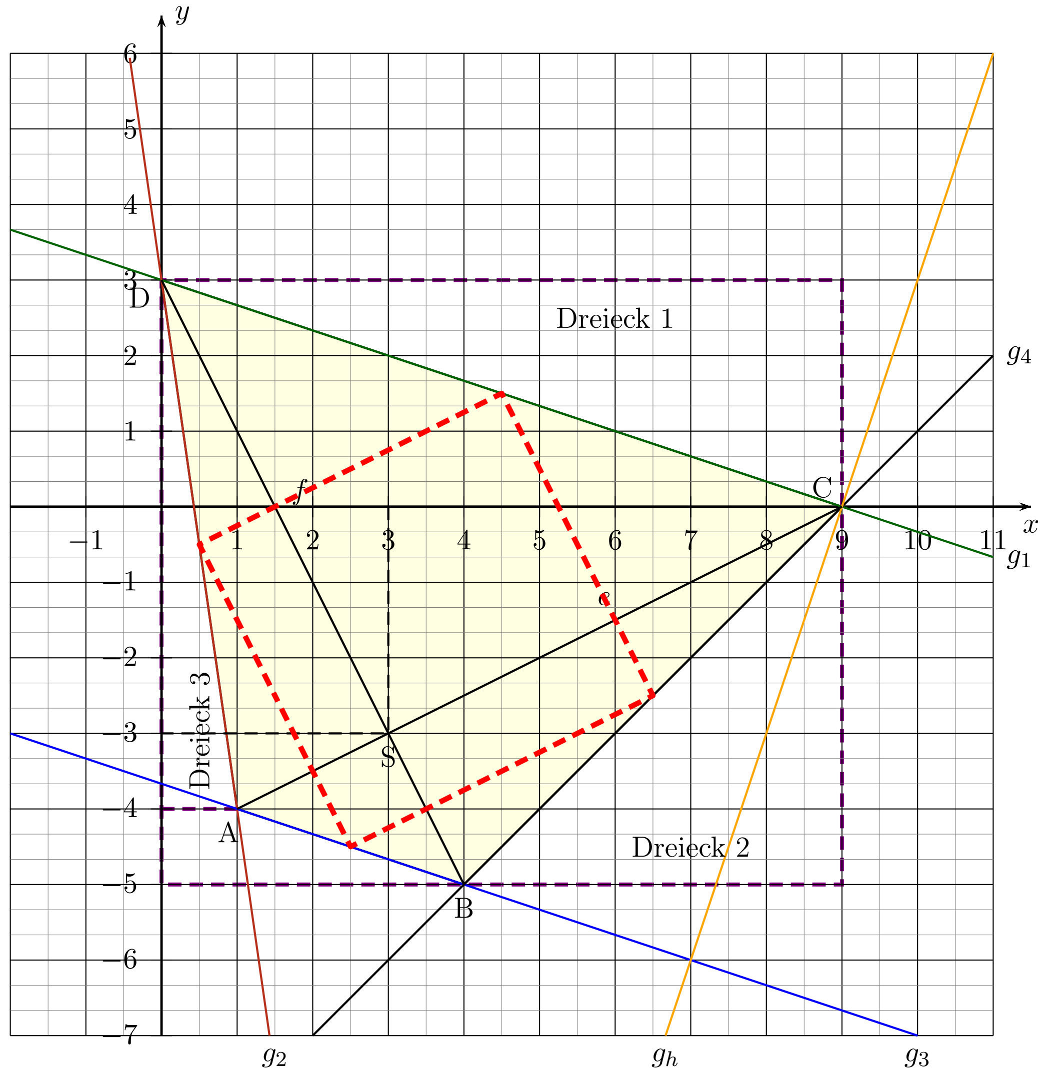
13. Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \quad 3\,y + x - 9 \;= 0 \qquad\qquad g_2: \quad y = -7\,x + 3$$

$$g_3: \quad x + 3\,y + 11 = 0 \qquad\qquad g_4: \quad \frac{x}{9} - \frac{y}{9} = 1$$

a) Zeichnen diese in ein Achsenkreuz $(-2 \le x \le 11 \;\wedge\; -7 \le y \le 6)$

Um die Geraden einzuzeichnen, berechnen wir jeweils die Koordinaten zweier Punkte oder bringen die Geradengleichungen auf Hauptform $y = m\,x + b$.



b) Diese Geraden begrenzen ein Viereck ABCD. Berechne die Schnittpunkte

$$\{A\} = g_2 \cap g_3 \qquad \{B\} = g_3 \cap g_4 \qquad \{C\} = g_4 \cap g_1 \qquad \{D\} = g_1 \cap g_2$$

$\{A\} = g_2 \cap g_3$ durch Einsetzen

$$\begin{aligned} x + 3\,(-7\,x + 3) + 11 &= 0 \\ x - 21\,x + 9 + 11 &= 0 \\ x &= 1 \qquad \text{in } g_2: y = -4; \quad \mathrm{A}(1 \mid -4) \end{aligned}$$

$\{B\} = g_3 \cap g_4$ durch Einsetzen nach Umformung von g_4

$$\begin{aligned} \frac{x}{9} - \frac{y}{9} &= 1 \iff x = 9 + y \\ 9 + y + 3\,y + 11 &= 0 \\ 4\,y + 20 &= 0 \\ y &= -5 \qquad \text{in } g_4: x = 4; \quad \mathrm{B}(4 \mid -5) \end{aligned}$$

$\{C\} = g_4 \cap g_1$ durch Einsetzen nach Umformung von g_4

$$\begin{aligned} 3\,y + 9 - y - 9 &= 0 \\ y &= 0 \qquad \text{in } g_4: x = 9; \quad \mathrm{C}(9 \mid 0) \end{aligned}$$

$\{D\} = g_1 \cap g_2$ durch Einsetzen

$$\begin{aligned} 3\,(-7\,x + 3) + x - 9 &= 0 \\ -21\,x + 9 + x - 9 &= 0 \\ x &= 0 \qquad \text{in } g_2: y = 3; \quad \mathrm{D}(0 \mid 3) \end{aligned}$$

Bringen wir alle Geradengleichungen auf Hauptform, so erkennen wir, dass zwei Seiten parallel sind. Das Viereck ist ein Trapez. Die beiden anderen Seiten sind es nicht, es ist kein Parallelogramm.

c) Stellen die Gleichungen der Diagonalen $e(\mathrm{AC})$ und $f(\mathrm{BD})$ auf.

Berechne exakt den Abstand des Punktes S vom Ursprung!

$$\begin{aligned} e(\mathrm{AC}): \; y &= \frac{0 - (-4)}{9 - 1}(x - 1) - 4 && \text{Zwei-Punkte-Form} \\ &= \frac{1}{2}\,(x - 1) - 4 \\ &= \frac{1}{2}\,x - \frac{9}{2} && \text{Hauptform} \\ f(\mathrm{BD}): \; y &= \frac{3 - (-5)}{0 - 4}\,x + 3 \\ &= -2\,x + 3 \end{aligned}$$

$e \cap f = \{\mathrm{S}\}$: mittels Gleichsetzverfahren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,x - \frac{9}{2} &= -2\,x + 3 \\ \frac{5}{2}\,x &= \frac{15}{2} \\ x &= 3 \qquad\qquad \text{in } f: \; y = -3 \quad \mathrm{S}(3\,|\,-3) \end{aligned}$$

Abstand von S zum Ursprung:

$$d(\mathrm{O},\mathrm{S}) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\ \mathrm{LE}$$

d) Berechne die Fläche des Vierecks auf zwei grundlegend verschieden Arten! Erforderliche Strecken dürfen nicht gemessen werden – sie sind aus den Koordinaten zu berechnen!

- Alternative 1: Wir umgeben das Trapez mit einem Rechteck und subtrahieren sämtliche Flächen außen herum!

$$\begin{aligned} A_{\text{Rechteck}} &= l \cdot b = (9-0)\big(3-(-5)\big) = 9 \cdot 8 = 72\ \mathrm{FE} \\ A_{\text{Dreieck 1}} &= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (9-0)(3-0) = \frac{27}{2}\ \mathrm{FE} && \text{rechts oben} \\ A_{\text{Dreieck 2}} &= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (9-4)\big(0-(-5)\big) = \frac{25}{2}\ \mathrm{FE} && \text{rechts unten} \\ A_{\text{Dreieck 3}} &= \frac{1}{20} \cdot l \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (1-0)\big(3-(-4)\big) = \frac{7}{2}\ \mathrm{FE} && \text{links} \\ A_{\text{Trapez}} &= \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{(1-0)+(4-0)}{2} \cdot \big(4-(-5)\big) = \frac{5}{2}\ \mathrm{FE} && \text{unten} \\ A_{\text{Trapez ABCD}} &= 72 - \frac{27}{2} - \frac{25}{2} - \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\ \mathrm{FE} \\ &= 40\ \mathrm{FE} \end{aligned}$$

- Alternative 2: Wir berechnen die Seitenlängen a und c sowie die Höhe und verwenden die Flächenformel für das Trapez!

$$\begin{aligned} d(\mathrm{A},\mathrm{B}) &= \sqrt{(4-1)^2 + \big(-4-(-5)\big)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}\ \mathrm{LE} \\ d(\mathrm{C},\mathrm{D}) &= \sqrt{(9-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{30}\ \mathrm{LE} \\ d(\mathrm{B},\mathrm{D}) &= \sqrt{(9-4)^2 + \big(0-(-5)\big)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{LE} \\ d(\mathrm{A},\mathrm{D}) &= \sqrt{(1-0)^2 + \big(3-(-4)\big)^2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{LE} \end{aligned}$$

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

Für die Höhe benötigen wir den Abstand von g_1 und g_3. Wir errichten eine Gerade g_h orthogonal zu g_3

$$\begin{aligned} m_{g_3} \cdot m_{g_h} &= -1 \\ -\frac{1}{3} m_{g_h} &= -1 \iff m_h = 3 \\ g_h:\ y &= 3\,(x-9)+0 = 3\,x - 27 \end{aligned}$$

$g_3 \cap g_h = \{\mathrm{F}\}$

$$\begin{aligned} x + 3\,(3\,x - 27) + 11 &= 0 \\ x + 9\,x - 81 + 11 &= 0 \\ 10\,x &= 70 \\ x &= 7 \quad \text{in } h:\ y = -6; \quad \mathrm{F}(7 \mid -6) \end{aligned}$$

Zurück zum Trapez:

$$h = d(\mathrm{C},\mathrm{F}) = \sqrt{(9-7)^2 + \big(0-(-6)\big)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Flächenberechnung:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{10} + 3\sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} = 40 \text{ FE}$$

Umfangsberechnung:

$$\begin{aligned} U_{\text{Trapez}} &= \sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 2 \cdot 5\sqrt{2} \text{ LE} \\ &= 4\sqrt{10} + 10\sqrt{2} \text{ LE} \end{aligned}$$

Ergänzend zu Teilaufgabe b) stellen wir nach der Umfangsberechnung fest, dass es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt.

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

- Alternative 3 (wenn das Rechnen mit Vektoren bekannt ist)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\
A_{\text{Dreieck ACD}} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(8 \cdot 7 - 4 \cdot (-1)\right) \\
&= 30 \text{ FE} \\
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
A_{\text{Dreieck ABC}} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot 4 - (-1) \cdot 8\right) \\
&= 10 \text{ FE} \\
A_{\text{Viereck ABCD}} &= 40 \text{ FE}
\end{aligned}$$

Vektoren nacheinander entgegen dem Uhrzeigersinn

e) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, die durch zwei aufeinanderfolgende Seitenmitten festgelegt sind und begründe, dass diese paarweise parallel sind!

Ist das entstehende Viereck ein Quadrat? Begründe!

Wir berechnen die Mittelpunkte der Seiten als arithmetisches Mittel der Koordinaten der Endpunkte:

$$\mathrm{M_{AB}}\left(\frac{5}{2} \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right), \quad \mathrm{M_{BC}}\left(\frac{13}{2} \,\middle|\, -\frac{5}{2}\right), \mathrm{M_{CD}}\left(\frac{9}{2} \,\middle|\, \frac{3}{2}\right), \mathrm{M_{AD}}\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right)$$

Berechnen wir die Steigungen der Seiten, so sehen wir, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Bemerkung: Dies ist in jedem Viereck so: Die Seitenmitten eines Vierecks bilden ein Parallelogramm (Satz von Varignon).

Berechnen wir noch die Seitenlängen des einbeschriebenen Vierecks, so sind diese gleich $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ LE.

Sind die Längen der Diagonalen gleich, heißt das noch nicht, dass sie sich gegenseitig halbieren. Diagonalen gleicher Länge können auch bei einer allgemeinen Raute auftreten.

f) Berechne die Größe des Winkels δ auf zwei grundlegend verschiedene Arten! Berechne die Größe des Winkels γ!

- Berechnung von δ: Das Dreieck 1 hat zwei spitze Winkel; der kleinere von beiden sei δ_1. Das Dreieck 3 hat ebenfalls zwei spitze Winkel, der kleinere von beiden sei δ_2. Es gilt: $\delta_1 + \delta + \delta_2 = 90°$.

$$\begin{aligned}
\tan(\delta_1) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\
&= \frac{3-0}{9-0} = \frac{1}{3} \\
\delta_1 &\approx 18{,}43° \\
\tan(\delta_2) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\
&= \frac{1-0}{3-(-4)} = \frac{1}{7} \\
\delta_2 &\approx 8{,}13° \\
\delta &\approx 90° - 18{,}43° - 8{,}13° \\
&\approx 63{,}43°
\end{aligned}$$

- Wir berechnen den Schnittwinkel δ von g_1 und g_2:

$$\begin{aligned}
\tan(\delta) &= \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \qquad\qquad m_1 = -\frac{1}{3};\ m_2 = -7 \\
&= \left|\frac{-\frac{1}{3} + 7}{1 + \frac{7}{3}}\right| \\
&= \left|-\frac{20}{3} \cdot \frac{3}{10}\right| \\
&= 2 \\
\delta &\approx 63{,}43°
\end{aligned}$$

Tragen wir δ bei α als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen ab, so ergibt sich ein gestreckter Winkel.

$$\alpha = 180° - \delta \approx 180° - 63{,}43° \approx 116{,}57°$$

14. Kürze folgende Bruchterme weitestmöglich!

a) $$\frac{12\,ab^2}{18\,a^3b} = \left(\frac{12}{18}\right)\left(\frac{a}{a^3}\right)\left(\frac{b^2}{b}\right) = \frac{2}{3}\,a^{1-3}b^{2-1} = \frac{3}{4}\,a^{-1}b^1 = \frac{2\,b}{3\,a^2}$$

b) $$\frac{32\,x^4y^5z^2}{24\,x^4y^4z^4} = \left(\frac{32}{24}\right)\left(\frac{x^4}{x^4}\right)\left(\frac{y^5}{y^4}\right)\left(\frac{z^2}{z^4}\right) = \frac{4}{3}\,x^{4-4}y^{5-4}z^{2-4} = \frac{4}{3}\,x^0y^1z^{-2} = \frac{4\,y}{3\,z^2}$$

c) $$\frac{48\,u^2v^5}{80\,u^9v^3} = \left(\frac{48}{80}\right)\left(\frac{u^2}{u^9}\right)\left(\frac{v^5}{v^3}\right) = \frac{3}{5}\,u^{2-9}v^{5-3} = \frac{3}{5}\,u^{-7}v^2 = \frac{3\,v^2}{5\,u^7}$$

d) $$\frac{27\,x^5yz^3}{45\,x^4y^2z^3} = \left(\frac{27}{45}\right)\left(\frac{x^5}{x^4}\right)\left(\frac{y}{y^2}\right)\left(\frac{z^3}{z^3}\right) = \frac{3}{5}\,x^{5-4}y^{1-2}z^{3-3} = \frac{3}{5}\,x^1y^{-1}z^0 = \frac{3\,x}{5\,y}$$

e) $$\frac{111\,u^4v^4w^4}{74\,u^5v^4w^3} = \left(\frac{111}{74}\right)\left(\frac{u^4}{u^5}\right)\left(\frac{v^4}{v^4}\right)\left(\frac{w^4}{w^3}\right) = \frac{3}{2}\,u^{4-5}v^{4-4}w^{4-3} = \frac{3}{2}\,u^{-1}v^0w^1 = \frac{3\,w}{2\,u}$$

f) $$\frac{38\,x^{12}y^{20}z^{14}}{57\,x^{14}y^{18}z^9} = \left(\frac{38}{57}\right)\left(\frac{x^{12}}{x^{14}}\right)\left(\frac{y^{20}}{y^{18}}\right)\left(\frac{z^{14}}{z^9}\right) = \frac{2}{3}\,x^{12-14}y^{20-18}z^{14-9} = \frac{2}{3}\,x^{-2}y^2z^5 = \frac{2\,y^2z^5}{3\,x^2}$$

g) $$\frac{4\,x-12}{15-5\,x} = \frac{4\,(x-3)}{5\,(3-x)} = -\frac{4\,(3-x)}{5\,(3-x)} = -\frac{4}{5}$$

h) $$\frac{x^2-4\,x}{16-x^2} = \frac{x^2-4\,x}{16-x^2} = \frac{x\,(x-4)}{(4-x)(4+x)} = \frac{-x\,(4-x)}{(4-x)(4+x)} = -\frac{x}{4+x} = -\frac{x}{x+4}$$

i) $$\frac{25-x^2}{x^2-10\,x+25} = \frac{(5-x)(5+x)}{(x-5)^2} = \frac{-(x-5)(5+x)}{(x-5)^2} = -\frac{5+x}{x-5} = -\frac{x+5}{x-5}$$

j) $$\frac{15-20\,x}{8\,x-6} = \frac{5\,(3-4\,x)}{2\,(4\,x-3)} = \frac{-5\,(4\,x-3)}{2\,(4\,x-3)} = -\frac{5}{2}$$

k) $$\frac{x^2-25}{5-x} = \frac{(x+5)(x-5)}{(-1)(x-5)} = -(x+5)$$

l) $$\frac{x^2-x-2}{4-x^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(2+x)(2-x)} = \frac{-(x+1)(2-x)}{(2+x)(2-x)} = \frac{-(x+1)}{2+x} = -\frac{x+1}{x+2}$$

m) $$\frac{x^2+2\,x-3}{-x^2-3\,x+4} = \frac{(x-1)(x+3)}{-(x^2+3\,x-4)} = \frac{(x-1)(x+3)}{-(x+4)(x-1)} = -\frac{x+3}{x+4}$$

n) $$\frac{90-48\,x+6\,x^2}{2\,x^2-24\,x+54} = \frac{6\,(15-12\,x+x^2)}{2\,(x^2-12\,x+27)} = \frac{3\,(5-x)(3-x)}{(x-3)(x-9)} = \frac{-3\,(5-x)(x-3)}{(x-3)(x-9)} = \frac{3\,(x-5)}{x-9}$$

o) $$\frac{(x-7)^3}{(14-2\,x)^5} = \frac{(x-7)^3}{(2\,(7-x))^5} = \frac{(x-7)^3}{2^5\,(7-x)^5} = \frac{(x-7)^3}{2^5\,(-1)^5(x-7)^5} = -\frac{1}{32\,(x-7)^2}$$

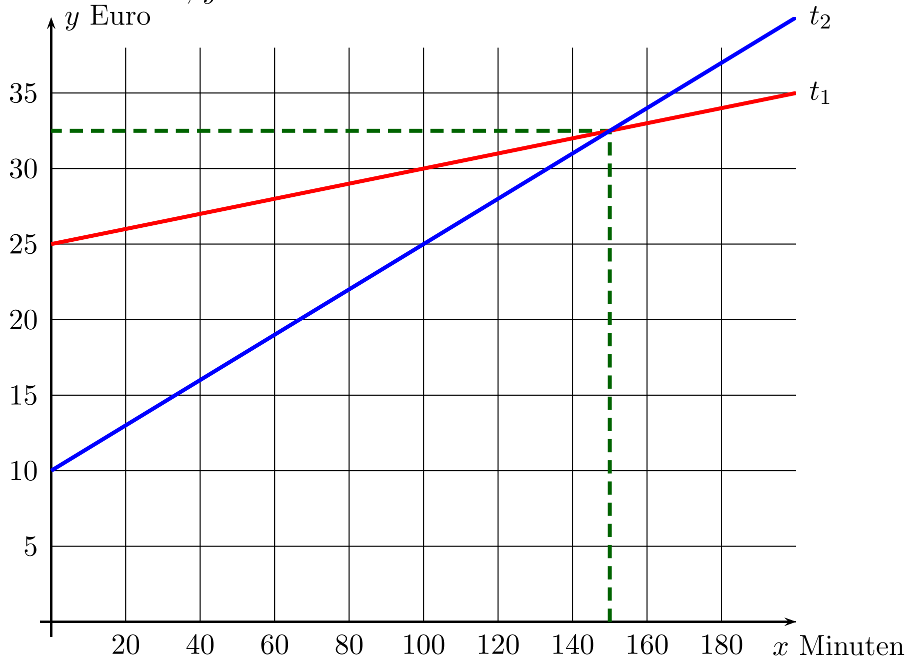
15. Ein Mobilfunkunternehmen bietet Handyverträge in zwei Varianten an. Bei der ersten Variante ist eine Grundgebühr von 25 Euro zu zahlen; für das Telefonieren fallen 5 Cent pro Minute an. Das Senden einer SMS ist kostenlos. Bei der zweiten Variante beträgt die Grundgebühr 10 Euro, für das Telefonieren fallen 15 Cent pro Minute an. Auch hier kosten SMS nichts.

    Erstelle zwei Gleichungen, die die Gesamtkosten je Variante in Abhängigkeit der Telefonminuten beschreiben!

    x sei die Zeit in Minuten. $t_1: \; y = 25 + \frac{5}{100}\,x$; $\qquad t_2: \; y = 10 + \frac{15}{100}\,x$

    Zeichne die zu den Gleichungen gehörenden Geraden in ein Koordinatensystem!

    x-Achse: 1 cm $\longrightarrow$ 20 min, y-Achse: 1 cm $\longrightarrow$ 5 Euro



    Welche sachbezogene Bedeutung hat die Steigung der Geraden, welche der y-Achsenabschnitt?

    Die Steigung der Geraden gibt den Minutenpreis wieder, der y-Achsenabschnitt den Grundpreis.

    Ab welcher Telefondauer ist die erste Variante günstiger?

    Ab einer Dauer von 150 Minuten ist die erste Variante günstiger, was sich auch rechnerisch durch Gleichsetzen ermitteln lässt.

16. Für welche Werte des jeweiligen Parameters haben die folgenden Parabeln gemeinsame Punkte mit der x-Achse?

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x - a + 2 \qquad y = -x^2 + 2b\,x + b \qquad y = a\,x^2 + 4\,x + 2$$

    Diskriminantenuntersuchung. Für $D = b^2 - 4\,ac > 0$ (aus $y = a\,x^2 + b\,x + c$) hat die zugehörige quadratische Gleichung zwei Lösungen und die Parabel zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam.

1. Parabel:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 + x - a + 2\\
D &= 1 - 4 \cdot 12 \cdot (2 - a)\\
&= 1 - 4 + 2\,a\\
&= 2\,a - 3
\end{aligned}
$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, da $\frac{1}{2} > 0$. Für $a < \frac{3}{2}$ liegt der Scheitel oberhalb der x-Achse.

2. Parabel:

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 2b\,x + b\\
D &= (2\,b)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot b = 4\,b^2 + 4\,b = 4\,b\,(b+1) > 0
\end{aligned}
$$

Fall 1: „Plus mal Plus ist Plus!“

$$b > 0 \wedge\; b+1 > 0 \iff b > 0 \;\wedge\; b > -1 \iff b > 0$$

Fall 2: „Minus mal Minus ist Plus!“

$$b < 0 \wedge\; b+1 < 0 \iff b < 0 \;\wedge\; b < -1 \iff b < -1$$

Für $b < -1$ oder $b > 0$ hat die Parabel zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam. Für $b = -1$ oder $b = 0$ (nach unten geöffnete Normalparabel) berührt die Parabel die x-Achse und hat nur einen Punkt mit der x-Achse gemeinsam.

3. Parabel

$$
\begin{aligned}
y &= a\,x^2 + 4\,x + 2\\
x_{1|2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8\,a}}{2\,a}
\end{aligned}
$$

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse liegen vor, wenn $a \leq 2 \;\wedge\; a \neq 0$.

Für welche Werte des Parameters liegt der Scheitel oberhalb der x-Achse?

Z. B. über quadratische Ergänzung oder mithilfe der Ergebnisse aus der ersten Teilaufgabe!

Hier exemplarisch anhand der ersten Parabel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\,x^2 + x - a + 2 = \frac{1}{2}\,\left(x^2 + 2\,x - 2\,a + 4\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\left((x+1)^2 - 1 - 2\,a + 4\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\left((x+1)^2 - 2\,a + 3\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(x+1)^2 - a + \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \text{S}\left(-1 \,\middle|\, \frac{3}{2} - a\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - a &> 0 \\ a &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

17. Für welche Werte des jeweiligen Parameters schneidet die Parabel $y = \frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 2$ die Gerade $y = -2\,x + b$ in zwei Punkten?

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 2 &= -2\,x + b \\ \frac{1}{4}\,x^2 &= b - 2 \\ x^2 &= 4\,b - 8 \end{aligned}$$

Für zwei gemeinsame Punkte zwischen Parabel und Gerade muss gelten:

$$\begin{aligned} 4\,b - 8 &> 0 \\ 4\,b &> 8 \\ b &> 2 \end{aligned}$$

Für welchen Wert des Parameters schneiden sich Gerade und Parabel an der Stelle $x = 2$?

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 2 &= -2\cdot 2 + b \\ b &= 3 \end{aligned}$$

18. Bestimme die Nullstellen der folgenden Parabeln und skizziere ihr Schaubild!

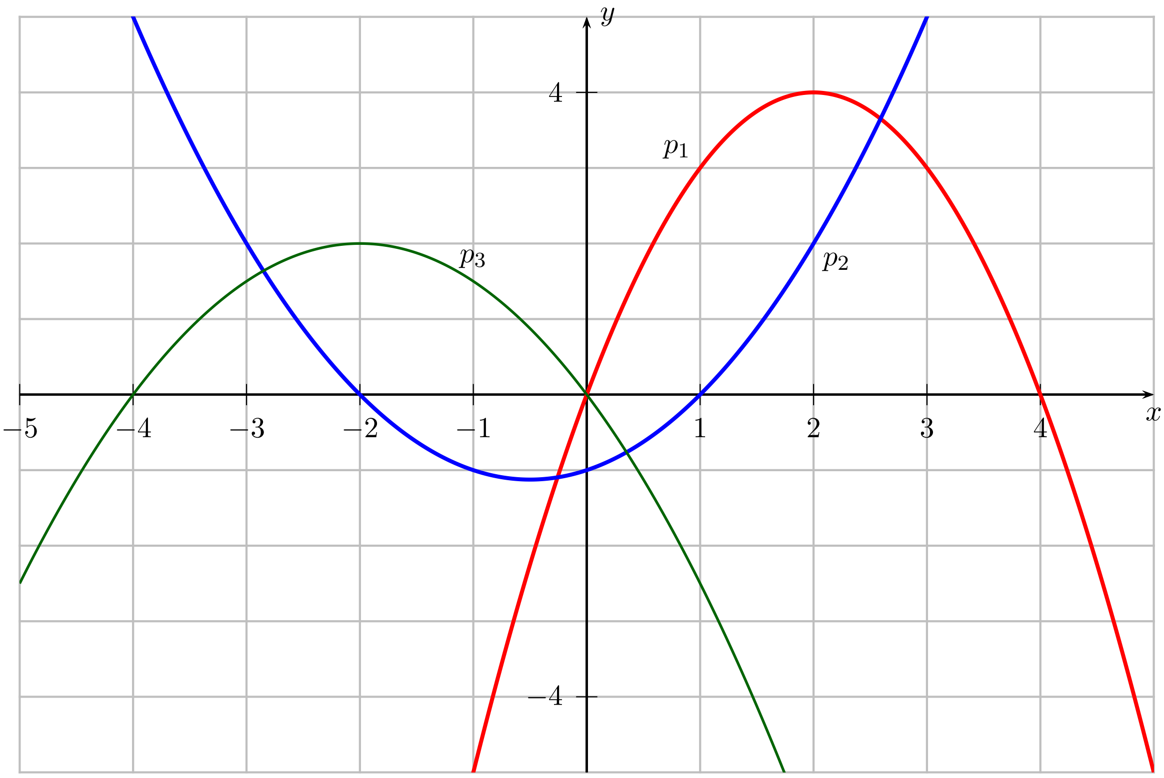
$$p_1:\; y = -x^2 + 4\,x \qquad p_2:\; y = \frac{1}{2}\,(x+2)(x-1) \qquad p_2:\; y = -\frac{1}{2}\,(x+2)^2 + 2$$

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

Nicht immer ist die Anwendung einer Lösungsformel der geschickteste Weg!

$0 = -x^2 + 4\,x = -x\,(x-4) \iff x = 0 \lor x = 4$	Faktorisieren, Satz vom Nullprodukt $\mathrm{N}_1(0 \mid 0)$; $\mathrm{N}_2(4 \mid 0)$
$0 = \frac{1}{2}\,(x+2)(x-1) \iff x = -2 \lor x = 1$	Satz vom Nullprodukt $\mathrm{N}_1(-2 \mid 0)$; $\mathrm{N}_2(1 \mid 0)$
$0 = -\frac{1}{2}\,(x+2)^2 + 2 \iff (x+2)^2 = 4 \iff x = -4 \lor x = 0$	$\mathrm{N}_1(-4 \mid 0)$; $\mathrm{N}_2(0 \mid 0)$

Beim Skizzieren des Schaubilds kann eine dynamische Geometriesoftware helfen, z. B. „geogebra“: `http://www.geogebra.org`



19. Wie ändert sich das Aussehen der Parabel, wenn sich der Parameter a ändert?

$$y = \frac{1}{2}\,(x-a)(x-1)$$

- Ist $a > 1$ und wächst a gegen $+\infty$, so wandert der Scheitel immer weiter nach rechts und nach unten. Die Parabel schneidet die x-Achse in zwei Punkten, die immer weiter

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

auseinander wandern. Der Scheitel liegt immer rechts von der y-Achse, die Parabel ist immer nach oben geöffnet.

- Ist $a < 1$ und fällt a gegen $-\infty$, so wandert der Scheitel immer weiter nach links und nach unten. Die Parabel schneidet die x-Achse in zwei Punkten, deren Abstand immer größer wird. Für $a = -1$ ist der Scheitel in der y-Achse enthalten. Für $a < -1$ liegt der Scheitel links von der y-Achse.

Bei der Beantwortung dieser Fragen kann zu Beginn eine dynamische Geometriesoftware nützlich sein!

Wann liegt der Scheitel auf der x-Achse?

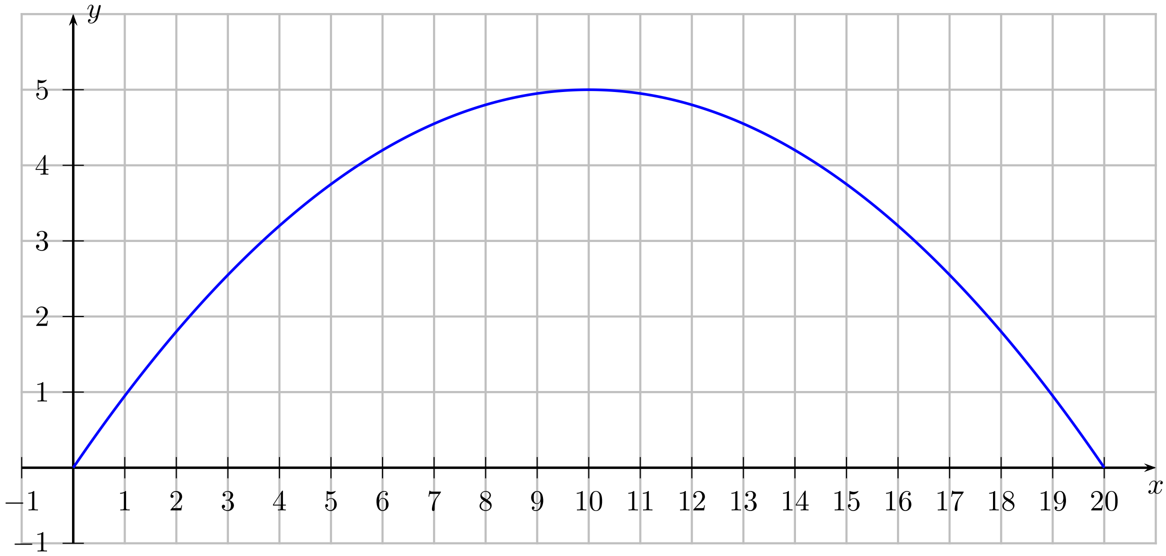
Der Scheitel liegt dann auf der x-Achse (oder: ist in dieser enthalten), wenn $a = 1$.

20. Wirft man einen Körper schräg nach oben, so durchläuft er näherungsweise eine Parabelbahn. Durch die Gleichung

$$y = x - \frac{1}{20}\,x^2$$

ist eine solche Flugbahn gegeben (Abwurf im Koordinatenursprung).

Skizziere das Schaubild der Parabel. Hinweis: Wertetabelle!



Welche maximale Höhe über der x-Achse erreicht der Körper?

Der Flugkörper erreicht eine maximale Höhe von 5 Längeneinheiten, was sich z. B. auch über eine quadratische Ergänzung oder über die Symmetrieeigenschaft ermitteln lässt: $x_S = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+20}{2} = 10$; $y_S = 10 - \frac{1}{20} \cdot 10^2 = 5$.

An welcher Stelle landet er wieder auf der x-Achse?

N(20 | 0) wegen $y = x - \frac{1}{20}\,x^2 = -\frac{1}{20}\,x\,(x - 20)$.

21. Überprüfe, ob folgende Termumformungen richtig sind: (Die Zahlen in Klammern sind Zeilennummern!)

$$
\begin{aligned}
& 12\,xy^3 - 2\,(3\,x + y^3)^2 + 36\,x^2 && (1)\\
= {} & 12\,xy^3 - 2\,(9\,x^2 + y^6) - 36\,x^2 && (2)\\
= {} & 12\,xy^3 - 18\,x^2 + 2\,y^6 + 36\,x^2 && (3)\\
= {} & 2\,(y^6 + 6\,xy^3 + 9\,x^2) && (4)\\
= {} & 2\,(y^3 + 3\,x)^2 && (5)\\
= {} & (2\,y^3 + 6\,x)^2 && (6)
\end{aligned}
$$

Solltest Du einen oder mehrere Fehler finden, beschreibe diese Fehler mit Worten!

In Zeile (2) wird das Binom falsch aufgelöst. Weiterhin wird aus $+36\,x^2$ ein $-36\,x^2$. In Zeile (3) wird die Klammer falsch aufgelöst. Das Vorzeichen beim letzten Term ändert sich erneut. In der letzten Zeile ist das Hineinziehen der 2 in die letzte Klammer falsch.

Wenn Du die Rechnung selbst nochmal durchgeführt hast, solltest Du $-2\,y^6 + 18\,x^2$ als Ergebnis erhalten!

22. Stelle folgende Formeln nach m um:

$$z = \frac{d_a - 2\,m}{m}; \qquad m \neq 0, z \neq -2$$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{d_a - 2\,m}{m} && \mid \cdot m \neq 0 \text{ n. V.}\\
z\,m &= d_a - 2\,m && \mid +2\,m\\
z\,m + 2\,m &= d_a\\
m\,(z+2) &= d_a && \mid : (z+2) \neq 0 \text{ n. V.}\\
m &= \frac{d_a}{z+2}
\end{aligned}
$$

23. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes werden mit a und c bezeichnet, die Höhe mit h; für seinen Flächeninhalt gilt:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Stelle die Formel nach c um!

$$
\begin{aligned}
A_{\text{Trapez}} \cdot \frac{2}{h} &= a + c\\
A_{\text{Trapez}} \cdot \frac{2}{h} - a &= c
\end{aligned}
$$

Wie ändert sich der Flächeninhalt des Trapezes, wenn die Seite a um eine Längeneinheit verlängert und die Seite c um eine Längeneinheit verkürzt wird?

$$\frac{a+c}{2}\cdot h \longrightarrow \frac{(a+1)+(c-1)}{2}\cdot h = \frac{a+1+c-1}{2}\cdot h = \frac{a+c}{2}\cdot h$$

Der Flächeninhalt ändert sich nicht.

24. Vereinfache die folgenden Brüche ohne Taschenrechner

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}};\ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}};\ \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}};\ \frac{\frac{39}{288}}{\frac{13}{12}}$$

Beispielhaft:

$$\frac{\frac{39}{288}}{\frac{13}{12}} = \frac{39}{288}\cdot\frac{12}{13} = \frac{3\cdot 13}{2\cdot 12^2}\cdot\frac{12}{13} = \frac{1}{8}$$

25. Nenne die Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 30, ohne den Taschenrechner zu verwenden!

    Diese Quadrate sollten immer präsent sein, auch ohne Taschenrechner!

26. Wie lauten die auf 2 Dezimalen (Nachkommastellen) genauen Werte von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$?

    Auch diese Werte sollten Sie ohne Taschenrechner nennen können!

27. Wie lässt sich der Term $a^4 - b^4$ rationell weitmöglichst zerlegen?

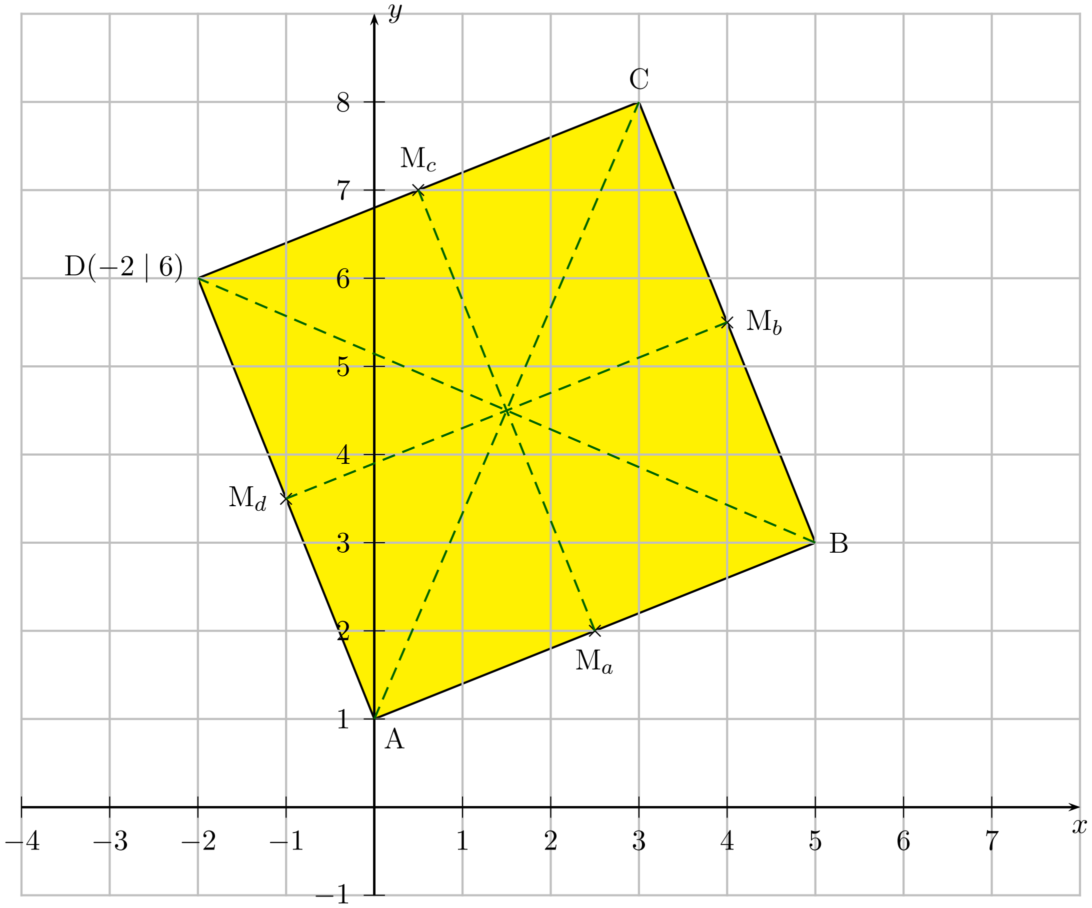
$$a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b) \qquad \text{Binomische Formel}$$

28. Wie groß ist jeweils das Quadrat von 1,6; 2,2; 2,4; 2,8?

    $1{,}6^2 = \left(\frac{16}{10}\right) = \frac{256}{100} = 2{,}56$. Als Anwendung der Quadratzahlen!

29. Die Punkte A(0 | 1), B(5 | 3), C(3 | 8) sind drei Ecken eines Quadrats ABCD.

a) Gib die Koordinaten von D an!



b) Berechne die Gleichungen der Geraden, welche dieses Quadrat ABCD symmetrisch zerlegen

Ein Quadrat wird durch vier Strecken symmetrisch zerlegt. Dies sind die Diagonalen sowie die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmittelpunkte.

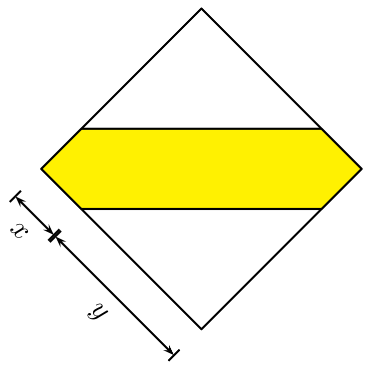
$$g_{(\mathrm{AC})} : y = \frac{8-1}{3-0}(x-0)+1 = \frac{7}{3}x+1$$ Zwei-Punkte-Form, Hauptform

$$g_{(\mathrm{BD})} : y = \frac{6-3}{-2-5}(x-6)-2 = -\frac{3}{7}x+\frac{36}{7}$$

$$g_{(\mathrm{M}_a\mathrm{M}_c)} : y = \frac{7-2}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+7 = -\frac{5}{2}x+\frac{33}{4}$$

$$g_{(\mathrm{M}_a\mathrm{M}_c)} : y = \frac{\frac{7}{2}-\frac{11}{2}}{-1-4}(x-4)+\frac{11}{2} = \frac{2}{5}x+\frac{39}{10}$$

30. In das Quadrat ist ein gefärbter „Doppelpfeil“ eingezeichnet. Gib den Flächeninhalt des Doppelpfeils in Abhängigkeit von x und y an.



$$A = (x+y)^2 - y^2 = x^2 + 2\,xy + y^2 - y^2 = x^2 + 2\,xy$$

31. Ein Warenhaus verkauft von einem Sonderposten von 200 Kühlschränken 30 Stück. Da der Absatz schleppend ist, setzt es den Preis um 20 % herab, worauf weitere 110 Kühlschränke verkauft werden. Der Rest wird mit einer weiteren Preisherabsetzung von 10 % verkauft, sodass der Verkaufspreis je Stück noch 279,00 EUR beträgt.

   a) Welchen Stückpreis hatte das Warenhaus ursprünglich angesetzt?

   Hier empfiehlt es sich, das Problem mittels einer Tabelle zu strukturieren:

	Ursprünglicher Preis	387,50 EUR	100 %	
–	Preissenkung um 20 %		20 %	
	Preis nach der ersten Preissenkung	310,00 EUR	80 %	100 %
–	Preissenkung um 10 %			10 %
	Preis nach der zweiten Preissenkung	279,00 EUR		90 %

   Mittels Dreisatz: 90 % $\longrightarrow$ 279,00 EUR und damit 100 % $\longrightarrow$ 310,00 EUR. Ebenso errechnen wir den ursprünglichen Preis.

   b) Berechne den Gesamterlös!

   Gesamterlös $= 30 \cdot 387{,}50 + 110 \cdot 310{,}00 + (200 - 30 - 110) \cdot 279{,}00$

32. Die Eigentümer eines Mercedes und eines BMW zahlten 2007 für die Teilkaskoversicherung jeweils 239 EUR. Nach einer Änderung der Prämien für 2008 verringerte sich der Betrag für den Mercedes-Fahrer um 55,8 %. Der BMW-Fahrer musste 42,3 % mehr zahlen als der Mercedes-Fahrer. Berechne jeweils die Prämien für 2008.

   Der Mercedes-Fahrer zahlt 2008 eine Prämie von 105,64 EUR, der BMW-Fahrer 150,32 EUR.

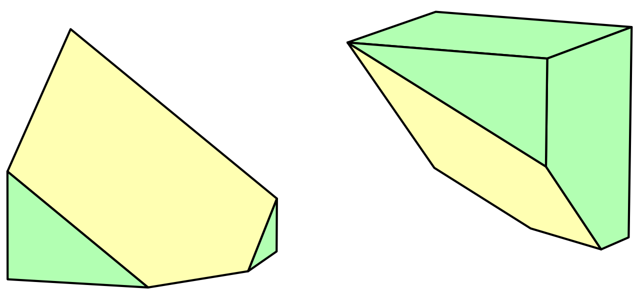
33. Ramon kauft auf dem Wochenmarkt eine Gurke mit der Masse 1 kg, die zu 99 % aus Wasser besteht. Leider fällt sein Rückweg in die Siestazeit. Während seines Mittagschläfchens ist die Gurke der Sonne ausgesetzt und besteht nach dem Aufwachen nur noch zu 98 % aus Wasser. Wie groß ist die Masse der Gurke jetzt?

Masse der Gurke	1000 Gramm	100 %
Feste Masse der Gurke vor Beginn der Siesta	10 Gramm	1 %
Feste Masse der Gurke nach Ende der Siesta	10 Gramm	2 %
Masse der Gurke nach Ende der Siesta	500 Gramm	100 %

500 g. Bedenke, dass die „grüne Masse" nicht weniger wird und hier als Basis dienen muss!

34. Schneidet man einen Würfel mit einer Ebene, so entsteht in der Schnittebene eine geometrische Figur, die wir als Würfelschnitt bezeichnen. Sind die folgenden Figuren als Würfelschnitte möglich?

   a) Dreieck: möglich!
   b) Viereck – Rechteck – Quadrat: möglich!
   c) Fünfeck: möglich, nur eben kein regelmäßiges Fünfeck, da dieses keine parallelen Seiten besitzt; siehe Zeichnung!
   d) Sechseck: möglich!
   e) Siebeneck: nicht möglich, da ein Würfel nur sechs Seitenflächen hat!
   f) Achteck: nicht möglich, da ein Würfel nur sechs Seitenflächen hat!



35. Eine Seerosenpopulation findet in einem 3500 Quadratmeter großen See dermaßen gute Wachstumsmöglichkeiten vor, dass sie sich pro Tag verdoppelt. Nach zwei Wochen ist der See völlig zugewachsen.

    Wann hatten die Seerosen den See nur zur Hälfte bedeckt?

    Einen Tag vorher!

Reichenberger Str. 8, 97877 Wertheim-Bestenheid, Tel.: 09342/9659-0, Fax: -199
E-Mail: info@bsz-wertheim.de, Homepage: www.bsz-wertheim.de

36. Stellen Sie fest, welche reelle Zahlen problemlos eingesetzt werden können (diese Zahlen nennt man die Definitionsmenge)! Stellen Sie den Term in einem kartesischen Koordinatensystem dar!

a) $T_a(x) = \sqrt{20 - 4\,x}$

Der Ausdruck unter der Wurzel muss nichtnegativ sein, d. h. $20 - 4\,x \geq 0 \iff 20 \geq 4\,x \iff x \leq 5 \iff x \in \,]-\infty; 5]$.

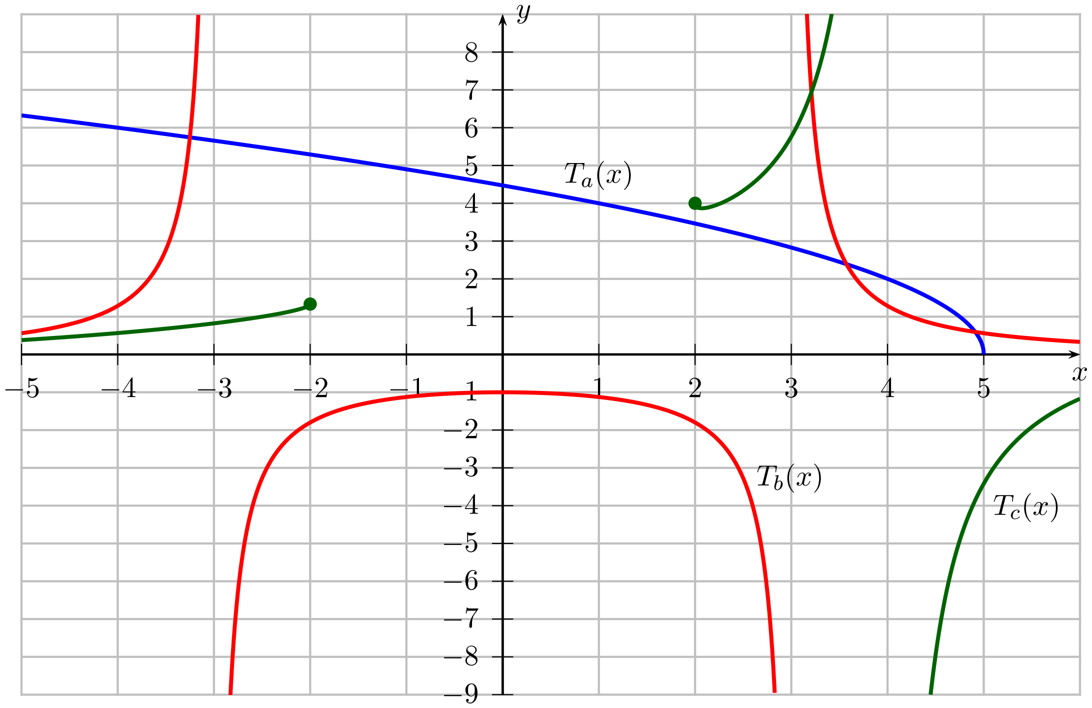
b) $T_b(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$

Der Nenner eines Bruches muss von Null verschieden sein, also $x^2 - 9 \neq 0 \iff x^2 \neq 9 \iff x \neq \pm 3$. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

c) $T_c(x) = \dfrac{8 - \sqrt{x^2 - 4}}{4 - x}$

Im Nenner eines Bruches darf nicht die Null stehen. Die 4 ist aus der Grundmenge $\mathbb{R}$ auszuschließen. Unter der Wurzel dürfen wegen der Grundmenge $\mathbb{R}$ keine negativen Zahlen stehen (man kann in $\mathbb{R}$ keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen; erweitert man den Zahlenraum so ist dies ohne weiteres möglich), also
$x^2 - 4 \geq 0 \iff x^2 \geq 4 \iff |x| \geq 2 \iff x \leq -2 \vee x \geq 2$. $D = \mathbb{R} \setminus \{4;]-2; 2[\}$

Für die Darstellung im Koordinatensystem empfiehlt es sich, eine Wertetabelle mit gerundeten Werten zu erstellen!



37. Berechne den exakten Abstand zwischen den Punkten P und Q ohne Taschenrechner!

   a) $P(0 \mid 0)$, $Q(3 \mid 10)$; $d(PQ) = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$ LE (LE für Längeneinheiten)

   b) $P(-7 \mid -2)$, $Q(6 \mid 4)$; $d(PQ) = \sqrt{\left(6-(-7)\right)^2 + \left(4-(-2)\right)^2} = \sqrt{205}$ LE

   c) $P(-4 \mid 3)$, $Q(-5 \mid -6)$; $d(PQ) = \sqrt{\left(-5-(-4)\right)^2 + \left(-6-3\right)^2} = \sqrt{82}$ LE

   Hinweis: Hast Du Dir die Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen und ein Dreieck für den Satz des Pythagoras ergänzt?

38. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $x - 30$, $x - 23$ und $x - 5$. Für welche Werte von x ist dieses Dreieck rechtwinklig?

   Wenn das Dreieck rechtwinklig sein soll, muss dem rechten Winkel die längste Seite gegenüberliegen. Das ist dann die Seite mit der Länge $x - 5$. Für alle Seite muss gelten: $x > 30$, da Seiten eine positive Länge haben.

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2 &= (x-30)^2 + (x-23)^2 \\
x^2 - 10\,x + 25 &= x^2 - 60\,x + 900 + x^2 - 46\,x + 529 \\
0 &= x^2 - 96\,x + 1404 \\
x_{1|2} &= 48 \pm \sqrt{48^2 - 1404} \\
&= 48 \pm \sqrt{(50-2)^2 - 1404} \\
&= 48 \pm \sqrt{2500 - 200 + 4 - 1404} \\
&= 48 \pm \sqrt{900} \\
&= 48 \pm 30 \\
x_1 &= 18 < 30 \\
x_2 &= 78
\end{aligned}
$$

   Das Dreieck hat dann die Seitenlängen 73 LE, 55 LE und 48 LE.

39. Löse und führe anschließend die Probe durch!

a) $x^2 - 2 \cdot 10^3 x - 15 \cdot 10^6 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_{1|2} &= 10^3 \pm \sqrt{(10^3)^2 + 15 \cdot 10^6} \\
&\overset{\text{P}}{=} 10^3 \pm \sqrt{10^6 + 15 \cdot 10^6} \\
&\overset{\text{D}}{=} 10^3 \pm \sqrt{10^6(1+15)} \\
&= 10^3 \pm \sqrt{10^6}\sqrt{(1+15)} \\
&= 10^3 \pm (10^6)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 \\
&\overset{\text{P}}{=} 10^3 \pm 10^{6 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 4 \\
&= 10^3 \pm 10^3 \cdot 4 \\
&= 10^3(1 \pm 4) \\
&\Rightarrow x = 5 \cdot 10^3 \vee x = (-3) \cdot 10^3
\end{aligned}
$$

Erläuterung: P = Potenzgesetz: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, D = Distributivgesetz

Probe: $x = 5 \cdot 10^3$

$$
\begin{aligned}
(5 \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^6 &= 0 \\
\iff 25 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^6 &= 0 \\
\iff 0 &= 0 \qquad \text{w. A.}
\end{aligned}
$$

Probe: $x = (-3) \cdot 10^3$

$$
\begin{aligned}
\left((-3) \cdot 10^3\right)^2 - 2 \cdot 10^3 \cdot (-3) \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^6 &= 0 \\
\iff 9 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^6 &= 0 \\
\iff 0 &= 0 \qquad \text{w. A.}
\end{aligned}
$$

b) $x^2 + 2 \cdot 10^{11} = 12 \cdot 10^5\, x \iff x^2 - 12 \cdot 10^5\, x + 2 \cdot 10^{11} = 0$

$$\begin{aligned}
x_{1|2} &= 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{(6 \cdot 10^5)^2 - 2 \cdot 10^{11}} \\
&\overset{1}{=} 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{36 \cdot 10^{10} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{10}} \\
&\overset{2}{=} 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{36 \cdot 10^{10} - 20 \cdot 10^{10}} \\
&\overset{3}{=} 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{16 \cdot 10^{10}} \\
&= 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{16}\sqrt{10^{10}} \\
&= 6 \cdot 10^5 \pm \sqrt{16}\left(10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 6 \cdot 10^5 \pm 4 \cdot 10^5 \\
&\Rightarrow x = 10 \cdot 10^5 = 10^6 \vee x = 2 \cdot 10^5
\end{aligned}$$

Probe: Selbst!

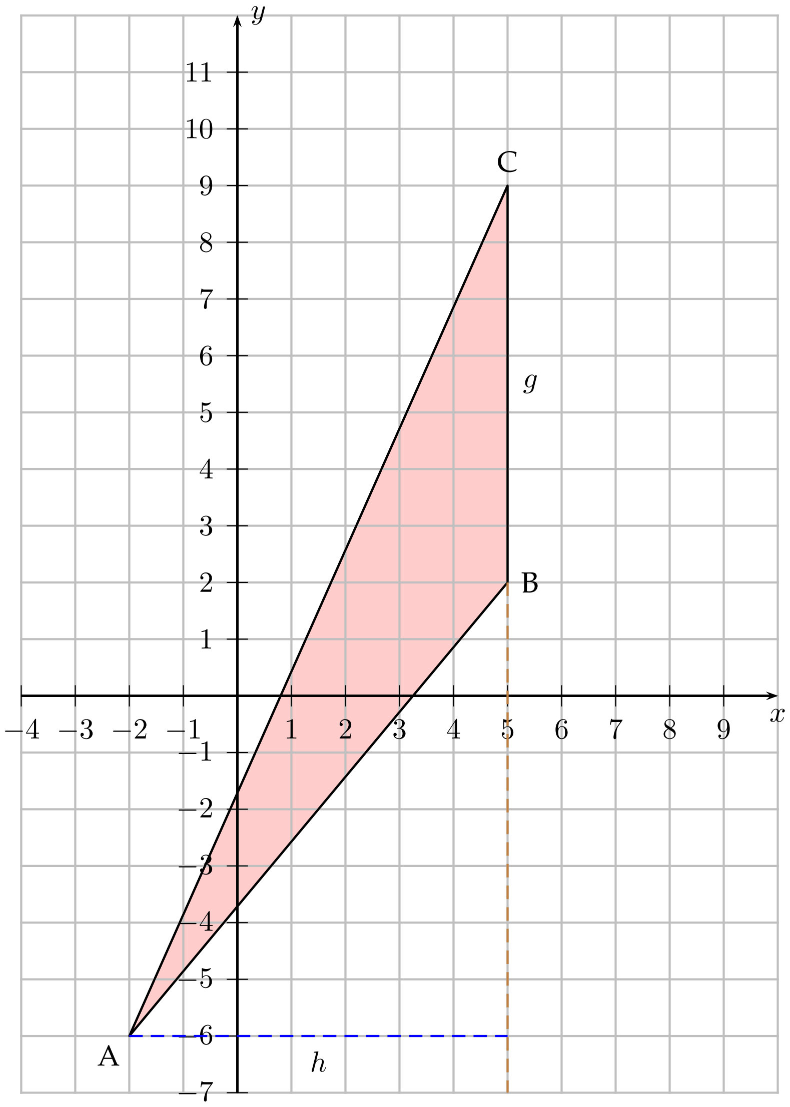
c) $x^2 - 5 \cdot 10^{70}\, x + 49 \cdot 10^{138} = 0$

$$\begin{aligned}
x_{1|2} &= 25 \cdot 10^{69} \pm \sqrt{625 \cdot (10^{69})^2 - 49 \cdot 10^{138}} \\
&= 25 \cdot 10^{69} \pm \sqrt{625 \cdot 10^{138} - 49 \cdot 10^{138}} \\
&= 25 \cdot 10^{69} \pm \sqrt{576 \cdot 10^{138}} \\
&= 25 \cdot 10^{69} \pm 24 \cdot 10^{69} \\
x &= 49 \cdot 10^{69} \ \vee\ x = 10^{69} \\
x &= 4{,}9 \cdot 10^{70} \ \vee\ x = 10^{69}
\end{aligned}$$

Probe: Selbst!

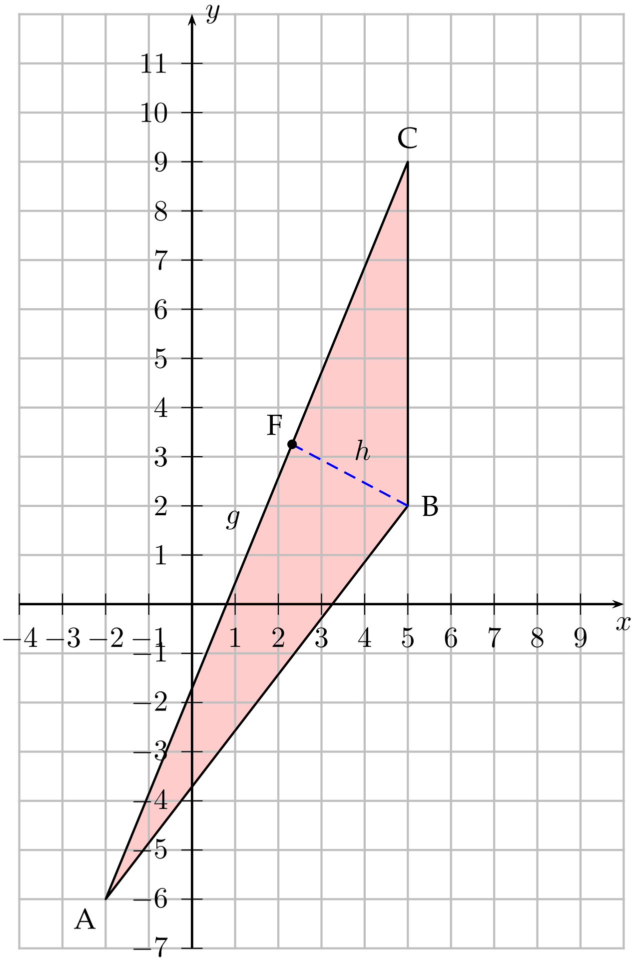
40. Zeichne in das folgende Dreieck die Höhen (es gibt drei Höhen in jedem Dreieck) ein und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks aus den Koordinaten ohne zu messen!

a) Wir wählen die Bestimmungsgrößen „Grundseite" g und Höhe h so, dass diese parallel zu den Achsen verlaufen! Dies wird Dir in Deiner Zeit am beruflichen Gymnasium sehr oft helfen!



$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot (9-2) \cdot \big(5-(-2)\big) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = \frac{49}{2} \text{ FE}$$

b) Wir wählen die längste Seite als Grundseite. Nun haben wir das Problem, die Höhe exakt zu bestimmen, da Messen nicht erlaubt ist!



$$g:\ y = \frac{15}{7}x - \frac{12}{7}$$
$$h:\ y = -\frac{7}{15}(x-5) + 2 = -\frac{7}{15}x + \frac{13}{3}$$

$g \cap h$

$$\frac{15}{7}x - \frac{12}{7} = -\frac{7}{15}x + \frac{13}{3}$$
$$x = \frac{635}{274}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{635}{274}\,\middle|\,\frac{891}{274}\right)$$

Wir berechnen exakt die notwendigen Längen:

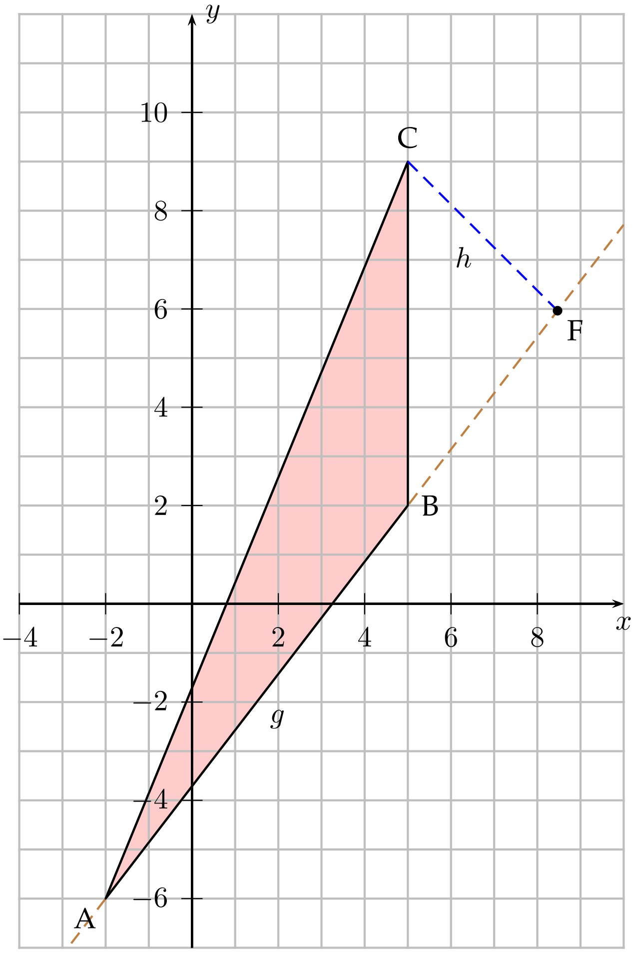
$$d(\mathrm{B},\mathrm{F}) = \sqrt{\left(5-\frac{635}{274}\right)^2 + \left(2-\frac{891}{274}\right)^2} = \frac{49}{274}\sqrt{274}\,\mathrm{LE}$$
$$d(\mathrm{A},\mathrm{C}) = \sqrt{274}\,\mathrm{LE}$$

Wir erhalten dann natürlich den selben Flächeninhalt:

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{274}\cdot\frac{49}{274}\sqrt{274} = \frac{49}{2}\,\mathrm{FE}$$

So umständlich zu rechnen solltest Du vermeiden, es funktioniert zwar, kostet aber deutlich mehr Zeit!

c) Wir wählen die bis jetzt noch nicht verwendete Seite als Grundseite! Auch hier ergibt sich das Problem der exakten Berechnung der Höhe!



$$g:\ y = \frac{8}{7}\,x - \frac{26}{7}$$

$$h:\ y = -\frac{7}{8}\,(x-5) + 9 = -\frac{7}{8}\,x + \frac{107}{8}$$

$g \cap h$

$$\frac{8}{7}\,x - \frac{26}{7} = -\frac{7}{8}\,x + \frac{107}{8}$$

$$x = \frac{957}{113}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{957}{113}\,\middle|\,\frac{674}{113}\right)$$

Wir berechnen exakt die notwendigen Längen:

$$d(\mathrm{C},\mathrm{F}) = \sqrt{\left(5-\frac{957}{113}\right)^2 + \left(9-\frac{674}{113}\right)^2} = \frac{49}{113}\sqrt{113}\ \mathrm{LE}$$
$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sqrt{113}\ \mathrm{LE}$$

Wir erhalten dann ebenfalls den selben Flächeninhalt:

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{113}\cdot\frac{49}{113}\sqrt{113} = \frac{49}{2}\ \mathrm{FE}$$

d) Natürlich ist es möglich, den Flächeninhalt über Vektoren und Determinante zu berechnen. Dies bleibt aber den Schülern aus Bayern vorbehalten, welche schon bei der Mittleren Reifeprüfung mit Vektoren arbeiten!